/ 4

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

5 - 2

TWEEDE REEKS

DEEL V

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1902

INHOUD.

V9, P1, 4, 6, M^1 5—7, M^2 3a, hβ, L^1 6a.

OVERZICHT DER DOOR DEN HEER A. N. GODEFROY NAGELATEN HANDSCHRIFTEN EN TEEKENINGEN OVER KROMME LIJNEN EN GEBOGEN OPPERVLAKKEN, AANWEZIG OP DE UNIVERSITEITS-BIBLIOTHEEK TE AMSTERDAM,

DOOR

D. J. KORTEWEG.
(Amsterdam.)

Bij zijne, voor ons Genootschap zoo gunstige, laatste beschikkingen, gaf de heer GODEFROY den wensch te kennen, dat in de werken van ons Genootschap een overzicht zoude verschijnen van de door hem aan ons nagelaten „aanteekenboekjes en geschreven opstellen over- en teekeningen van kromme lijnen en gebogen oppervlakken."

Als bibliothecaris van ons Genootschap meende ik, dat op mij in de eerste plaats de taak rustte, dezen wensch te vervullen. Daarbij bleek het mij spoedig, dat het verlangde overzicht òf vrij uitvoerig moest worden, òf anders van geene beteekenis zoude zijn.

Zoowel de gevoelens van erkentelijkheid jegens den overledene, alsook de overtuiging, dat zijne onvermoeide nasporingen, vooral op het gebied der transformaties van kromme lijnen, waarvan er meerdere zeer eenvoudige door hem zijn uitgedacht en toegepast, eene nadere kennisname verdienen, maakten de keuze niet twijfelachtig. Wat voor GODEFROY's onderzoekingen over de MACLAURIN'sche transformatie reeds is verricht door Dr. P. H. SCHOUTE in zijne verhandeling „Over de constructie van unicursale krommen door punten en raaklijnen" (*Nieuw Archief*, XII, p. 1—37), zal ook voor andere zijner onderzoekingen, wier inhoud in ons overzicht der „aanteekenboekjes" wordt toegelicht, allicht met vrucht kunnen geschieden.

Deze aanteekenboekjes en de dikwijls zeer uitvoerige en met talent bewerkte teekeningen zijn, evenals de overige hand-

schriften, op de universiteits-bibliotheek voorhanden en zoodanig gecatalogiseerd en gemerkt, dat zij met behulp der hier aangegeven nummers gemakkelijk zullen worden teruggevonden.

Het heeft ons ondertusschen gewenscht toegeschenen aan het overzicht der aanteekenboekjes en der verdere handschriften te doen voorafgaan de korte verslagen, door GODEFROY zelven opgesteld, van de beide eerste voordrachten door hem op 5 Nov. en 24 Dec. 1873 in ons Genootschap gehouden. Deze korte verslagen waren voor het toenmalige tijdschrift van het Genootschap, het „*Archief*" bestemd, maar zijn daarin nimmer opgenomen. Dit verzuim wenschen wij thans te herstellen, te eer omdat deze verslagen, vooral wanneer men de daarbij behoorende teekeningen raadpleegt, een duidelijk denkbeeld geven van het karakter der talrijke mondelinge voordrachten, door GODEFROY op ons Genootschap gehouden, ons tevens de wijze doen kennen, waarop GODEFROY tot zijne belangrijkste nasporingen gekomen is en bovendien gelegenheid geven reeds dadelijk van een vrij groot gedeelte der voorhanden teekeningen de beteekenis te verklaren, beter dan dit op andere wijze zoude kunnen geschieden.

A. Kort verslag der voordracht van 5 Nov. 1873.

Als spreker had zich bereid verklaard op te treden de architect A. N. GODEFROY, in den loop van het genootschapsjaar als lid aangenomen, en die tot onderwerp had gekozen het bepalen van den omtrek der kegelsneden in het algemeen, door punten ontstaande door stelsels snijlijnen om 2 vaste punten draaijende, alsmede de bepaling van de raaklijn in ieder punt van den omtrek.

Uit de inleiding bleek, dat het denkbeeld tot deze beschouwing was ontstaan door eene figuur, voorkomende in een bouwkundig werk van JOOST VERMAARSCH, mr. metselaar te Leiden, leerling van den landmeter ABRAHAM WURTZ, in 1678 te Amsterdam uitgegeven [1]) en waarin wordt verklaard, hoedanig

[1]) In een der manuscripten van GODEFROY, gedateerd 25 Januari 1875, waarin de in de voordrachten van 5 Nov. en 24 Dec. 1873 behandelde stof eenigermate uitvoeriger is uitgewerkt, wordt melding gemaakt van eene vroegere uitgave van dit zelfde werk, getiteld: *Eerste deel der Bouwkunst ofte grondige bewijsredenen over den Sin en de Practijck van den autheur* VINCENT SCAMOZZI .....

men den omtrek van eene parabool zal kunnen vinden, wanneer drie punten van dien omtrek gegeven zijn [2]).

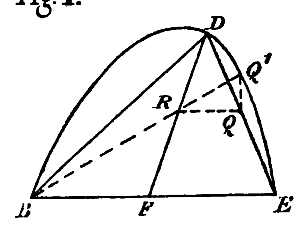
Spreker wees er op, dat men eene parabool kan beschouwen als de perspectief of centrale projectie van een cirkel, en leidde daaruit eene hoogsteenvoudige methode af om ook ellipsen en hyperbolen door middel van zulke stelsels snijlijnen te bepalen. Hieruit bleek o.a., hoedanig men bij parabolen en hyperbolen het beginsel van voortdurendheid (principe de continuité) bevestigd vond, en het onderscheid tusschen de *lineaire* eigenschappen in tegenstelling met de *beschrijvende* of *descriptive* eigenschappen; een en ander naar aanleiding van de denkbeelden door J. V. Poncelet ontwikkeld in zijn „Traité der propriétés projectives des figures", al hetwelk met in het groot geteekende figuren [3]), door kleuren verduidelijkt, werd toegelicht en mondeling verklaard.

---

door Joost Vermaarsch, *meester metselaar tot Leyden.... Gedruckt bij* Abraham Verhoeff 1664. Op de Amsterdamsche Universiteitsbibliotheek is aanwezig de Amsterdamsche editie van 1678. De bedoelde figuur komt aldaar voor op de eerste plaat aan het einde der inleiding als figuur D. Zij dient tot toelichting van het werkstuk »*Hoe men een Parabole om een gegeven triangel kan beschrijven.*" Zij bevat slechts de constructie punt voor punt; de raaklijn-constructie, die Godefroy gediend heeft tot grondslag van de meeste zijner latere raaklijnconstructies, is dus van Godefroy's eigen vinding.

[2]) De constructie van Vermaarsch wordt, voor zoover de ééne helft der parabool betreft, weergegeven door nevensgaande figuur. Het is niet moeilijk daarin eene Maclaurin'sche transformatie der rechte DE te herkennen, zooals die door P. H. Schoute omschreven is in het Nieuw Archief, deel XII, p. 20—22 (1885). Daarbij is dan DF de richtlijn *f*, het *eerste* straalpunt A is het punt in 't oneindige der lijnen RQ, het *tweede* is het punt B, het *derde* C het punt in 't oneindige der lijnen QQ'. Men vergelijke slechts de voorstelling der Maclaurin'sche transformatie hier gegeven in fig. 2. Inderdaad voert de contructie van Vermaarsch, door perspectiveering, onmiddellijk tot den meest algemeenen vorm der Maclaurin'sche transformatie.

Fig. 1.

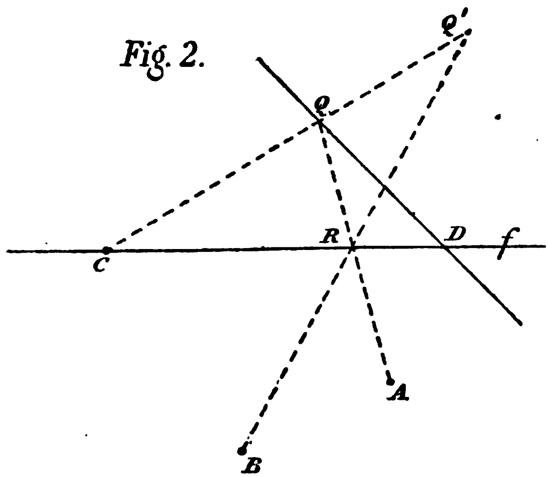


[3]) De bedoelde figuren vindt men vereenigd op eene teekening gemerkt I^A. De bovenste bevat de constructie der parabool volgens Vermaarsch met deze bijzonderheid dat BE loodrecht staat op de richtlijn DF, welke tevens de as is der parabool en waaraan de lijnen QQ' evenwijdig loopen. Door vervolgens het straalpunt C niet in het oneindige, maar op eindigen afstand ergens op de richtlijn te kiezen, ontstaan ellipsen of hyperbolen, waarvan er van elk soort ééne wordt voorgesteld in de beide onderste figuren.

Daarna behandelde de spreker uit hetzelfde oogpunt de kegelsneden door 5 gegeven punten, waarvan de algemeene vergelijking werd opgemaakt, en ook daarbij werd aangetoond op welke hoogsteenvoudige wijze alle overige punten door het trekken van drie lijnen kunnen worden gevonden, terwijl de raaklijn in dat punt door het trekken van slechts ééne lijn dadelijk bepaald wordt [4]).

[4]) Gestoken in het kleed der MACLAURIN'sche transformatie, zooals deze door SCHOUTE (zie noot (2)) beschreven werd, komt de constructie neer op de hier in fig. 2 aangegevene. De vijf punten door welke zich GODEFROY de kegelsnede bepaald denkt en welke dan op hunne beurt de straalpunten A, B, C, de richtslijn *f* en de te transformeeren rechte QD gemakkelijk bepalen, zijn de volgende: vooreerst de drie punten B, C en D der figuur, ten tweede het snijpunt van AB en QD dat wij E zullen noemen, en ten derde een willekeurig door de MACLAURIN'sche constructie bepaald punt Q'.

Fig. 2.



De raaklijn in eenig punt Q' wordt nu eenvoudig gevonden door het snijpunt H te bepalen van CQ met BA, daarna te trekken de lijn RH, haar snijpunt U met QD te bepalen en dit te vereenigen met Q'. Inderdaad vloeit deze constructie onmiddellijk voort uit den zeshoek van PASCAL, indien men, opmerkende dat C, Q', B, E en D allen op de kegelsnede gelegen zijn, CQ' als de 1e, de raaklijn in Q' als de 2e, Q'B als de 3e, BE als de 4e, ED als de 5e en DC als de 6e zijde beschouwt, waarbij dan RHU als de PASCAL'sche lijn optreedt. De afleiding der constructie door GODEFROY is evenwel eene andere. Zij is te vinden in zijn opstel van 25 Januari 1875, vermeld bij de „*overige handschriften*" (onder *D*) als N°. 2 en komt ongeveer hierop neer, dat de juistheid der overeenkomstige raaklijnconstructie bij de parabool van VERMAARSCH langs analytisch-metrischen weg bewezen wordt. Daarna wordt dan perspectiveering toegepast.

Ten slotte merken wij nog op, dat één der drie aspunten of straalpunten, het punt A namelijk, door GODEFROY steeds het *vergaarpunt* genoemd wordt, C beschouwd hij als het *eerste*, B als het *tweede* aspunt.

Hij wees daarbij aan, dat die oplossing ten eenemaal verschillend is van die door Prof. JACOB DE GELDER gegeven in zijne „Handleiding tot het meetkundig teekenen", in 1829 verschenen, en gaf alsnog eene meer algemeene beschouwing en oplossing te dien aanzien, waarvan de handelwijze van Prof. DE GELDER als een bijzonder geval kan worden aangemerkt; een en ander werd wederom met figuren in het groot toegelicht[5]).

Na aldus de *kegelsneden* in het algemeen te hebben behandeld, ging spreker over tot de toepassing op de *cirkelomtrekken*, en wees daarna weder met geteekende figuren[6]) aan, door welke onderscheidene en hoogsteenvoudige stelsels van snijlijnen de geheele omtrek, punt voor punt, kan worden bepaald, wanneer drie punten van den omtrek gegeven zijn, en tevens de raaklijn in elk punt kan gevonden worden.

Hierbij werd gewezen op de praktische toepassingen bij het uitbakenen van groote cirkelbogen op het veld, waarvan drie punten gegeven zijn, zoodat men alleen door bakens en zichtlijnen de punten van den cirkelomtrek kan bepalen. Hij herinnerde hierbij aan de „simpele werkstukken" in het 2e boek der „Mathematische oefeningen" van Prof. FR. VAN SCHOOTEN, te Amsterdam in 1660 uitgegeven, aangehaald bij PONCELET in het bovengenoemde werk en aldaar aangeprezen als toepassingen van de „Géometrie de la Règle" in tegenstelling van de „Géometrie du Compas".

Daarna vervolgde spreker zijne beschouwingen door de verklaring van een ander stelsel snijlijnen, door twee vaste punten draaijende of pivoteerende, in verband met reeksen punten op gegeven lijnen, bepaald door onderling evenwijdige lijnen, en deed uitkomen, welke toepassingen hiervan bij de perspectief van cirkelomtrekken[7]) gemaakt kunnen worden, waarbij werd

---

[5]) Deze figuren vindt men op de met I^B gemerkte teekening, waarop tevens voorkomt eene contructie van den cirkel volgens de gewijzigde methode van VERMAARSCH, beschreven in noot (3).

[6]) Een groot aantal van zulke constructies, daaronder ook die van POHLKE, welke zoo straks ter sprake komt, vindt men vereenigd op de met I^C en I^D gemerkte teekeningen. Nadere bijzonderheden over deze en andere der hier besproken constructies zijn te vinden in het reeds geciteerde opstel van 25 Januari 1875. Dewijl zij echter de hoofdzaak van GODEFROY's arbeid niet raken, meenen wij ze hier achterwege te moeten laten.

[7]) Teekening I^E bevat constructies betrekking hebbende op het in perspectief brengen van een cirkel.

herinnerd, hoedanig dit onderwerp was behandeld bij VERGNAUD en THIBAULT in hunne werken over de perspectief.

Hier vond spreker aanleiding tot mededeeling van de door Prof. POHLKE voor weinige jaren bekend gemaakte hoogsteenvoudige manier tot bepaling der raaklijnen aan den cirkelomtrek, waarvan het omgeschreven vierkant gegeven is, en die door projecteeren evenzeer op alle kegelsneden kan worden toegepast; maar deed opmerken, dat POHLKE niet aangeeft waar de *raakpunten* gelegen zijn; hetgeen door spreker op hoogsteenvoudige wijze werd aangetoond en eveneens met geteekende figuren toegelicht.

Voorts werd nog aangetoond, op welke wijze de oplossing van POHLKE kan toegepast worden op het beschrijven van den cirkel, die de drie zijden van den driehoek inwendig aanraakt[8]). Daarbij wees spreker aan, op welke wijze de raakpunten gevonden worden op de zijden van den gegeven driehoek, door alleen gebruik te maken van de lengten der zijden; die raakpunten onderling met rechte lijnen vereenigd, gaven onmiddellijk, in verband met de hoekpunten van den driehoek, al het noodige om den gevraagden cirkelomtrek door middel van raaklijnen te bepalen en aan te wijzen wáár het raakpunt op iedere raaklijn gelegen is.

Voorts trad spreker in eene beschouwing, hoe men door hetzelfde beginsel als door hem op de kegelsneden was toegepast, kon geraken tot stelsels kromme lijnen van den 3^{en} en van den 4^{en} graad en het bijzonder geval, waarin deze lijnen overgaan in eene parabool. Hij gaf de toezegging omtrent dit onderwerp op eene der volgende vergaderingen in nadere ontwikkeling te treden, en wees nog kortelijk voorloopig aan, op welke wijze men door stelsels snijlijnen met een gegeven cirkel wederom de 3 soorten kegelsneden door punten kan bepalen en de raaklijnen in die punten vinden.

Het laatst gesprokene werd zooveel doenlijk toegelicht met figuren uit de hand op het bord met krijt geschetst, doch die spreker zich voorstelt eveneens met in het groot geteekende figuren, door kleuren verduidelijkt, later te verklaren.

Op voorstel van den heer L. JANSE werd de spreker uitgenoodigd tot het mededeelen der gehouden voordracht met de

---

[8]) De daarbij behoorende teekening is gemerkt I^{F}.

noodige figuren in het *Archief* van het Genootschap en verklaarde hij zich daartoe bereid.

Amsterdam, 6 Nov. 1873,
aldus opgemaakt door A. N. Godefroy.

B. Kort verslag der voordracht van 24 Dec. 1873.

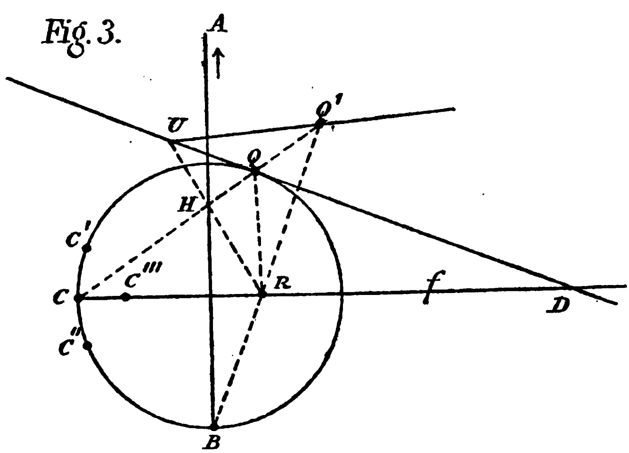
Als spreker had zich bereid verklaard het lid A. N. Godefroy, die, naar aanleiding van het besprokene op de eerste Bijeenkomst (5 Nov. l.l.), in behandeling nam de kromme lijnen van den vierden graad, die ontstaan door de snijding van twee stelsels rechte lijnen in gegeven aspunten ronddraaijende.

Aanvangende met de onderstelling, dat die aspunten gelegen zijn op den omtrek van een gegeven cirkel en dat de eene straal zich beweegt op den omtrek, en de daarbij behoorende op de middellijn en door het voetpunt van de loodlijn, die uit den omtrek op die middellijn is neergelaten[9]), werd de vergelijking van de dus ontstaande kromme lijn opgemaakt.

---

[9]) Tot toelichting van de hier aangegevene constructie dient in het „kort verslag" nevensgaande figuur, waarbij door ons letters zijn geplaatst die onmiddellijk het verband met de algemeenere contructie (zie noot (4)) met drie in het eindige gelegen straalpunten en de daarbij beschrevene raaklijn-constructie doen zien. In die figuur ligt het straalpunt A, het *vergaarpunt* van Go-

Fig. 3.



defroy, in het oneindige. De ligging van het straalpunt C *op* den cirkel, die getransformeerd wordt, heeft voorts ten gevolge dat de vierdegraadskromme, die in het algemeene geval zoude optreden, degenereert in de rechte BC en in eene derdegraadskromme, die in C een keerpunt vertoont. Men vindt deze kromme afgebeeld op de I^G gemerkte teekening, waarover nader in de volgende noot.

Wat de raaklijn-constructie betreft, daartoe wordt de cirkel vervangen door

Vervolgens werden andere en zeer uiteenloopende plaatsingen voor de aspunten in beschouwing genomen en de verschillende gedaanten der daaruit ontstaande kromme lijnen aangewezen, met teekeningen toegelicht [10]), en de vorm der vergelijkingen aangetoond, waartoe die analytisch aanleiding geven — zijnde in het algemeen van den vierden graad. Daarbij werd eene zeer eenvoudige handelwijze aangegeven voor het trekken der raaklijnen, die evenwel eene bijzondere wijziging ondergaat voor het geval, dat het aspunt niet op de middellijn is gelegen [11]).

Voorts werd het aspunt van den stralenbundel, die langs den cirkelomtrek loopt, verplaatst in het middelpunt, en daardoor bleek alsnu de parabool te ontstaan, hebbende tot parameter de middellijn van den cirkel en tot brandpunt het centrum [12]).

Door verplaatsing van het tweede aspunt buiten of binnen den cirkelomtrek ontstond op gelijke wijze eene ellips of eene hyperbool, waarbij altijd de middellijn van den cirkel gelijk is aan den parameter, en het middelpunt een der brandpunten. Ook de asymptoten werden bepaald.

---

hare raaklijn in het te transformeeren punt Q. Die raaklijn transformeert zich dan in eene kegelsnede, welke de uit den cirkel ontstaande kromme in het punt Q′ raakt, en wier raaklijn kan gevonden worden door de in noot (4) der vorige voordracht beschrevene constructie, welke hier ter plaatse werkelijk is uitgevoerd.

[10]) De met I^G gemerkte teekening bevat drie krommen van den derden graad respectievelijk met keerpunt, dubbelpunt en geïsoleerd punt verkregen door het punt C achtereenvolgens te plaatsen in C, C′ en C″ (zie fig. 3) en eene unicursale kromme van den vierden graad met dubbelpunten in B en C‴ verkregen door C te verplaatsen naar C‴. Daarbij is C‴ een dubbeltellend dubbelpunt, gevormd door twee elkander rakende takken der vierdegraadskromme.

Daarentegen bevat de met I^H gemerkte teekening (achterzijde van I^E), op ééne uitzondering na, uitsluitend krommen van den vierden graad verkregen door de straalpunten buiten den cirkel te kiezen. Bij de ééne uitzondering ligt het straalpunt C weder op den cirkel, en treedt daarbij op als geïsoleerd punt eener unicursale derdegraadskromme met drie bestaanbare asymptoten.

[11]) Inderdaad wordt de constructie der raaklijn bij de MacLaurin'sche transformatie eenigszins ingewikkelder zoodra het straalpunt C buiten de richtlijn f valt. Zie daaromtrent de reeds in noot (2) aangehaalde verhandeling van Schoute, aldaar p. 22.

[12]) Deze constructie en de volgende, waardoor ellipsen en hyperbolen ontstaan, is voorgesteld op teekening I^J en op grootere schaal op de teekeningen I^K, I^L, I^M en I^N. Voor meerdere bijzonderheden, deze teekeningen betreffende, moet weder verwezen worden naar het opstel van 25 Januari 1875. Bij al deze figuren gaat de MacLaurin'sche transformatie in eene homographische over, omdat de drie straalpunten in ééne rechte gelegen zijn (zie de verhandeling van Schoute, p. 22).

Bij deze constructie bleek verder, dat de lijn getrokken door het tweede aspunt, evenwijdig aan de middellijn waarop geprojecteerd wordt, niets anders is dan de richtlijn.

Voorts werd aangewezen, dat die middellijn tevens is eene gemeenschappelijke koorde van den cirkel en de kegelsnede, zoodanig dat de raaklijnen aan de overeenkomstige punten getrokken, elkander op die koorde ontmoeten.

Na nog andere eigenschappen te hebben aangetoond, wees spreker aan, dat bij de ellips en hyperbool nog eene tweede gelijkvormige lijn bestaat, waarvan het cirkelcentrum almede een brandpunt is, en verklaarde dit door de gevonden kegelsneden te beschouwen als de projectiën van de doorsneden van twee gelijke rechte cirkelvormige kegelvlakken, waarvan de assen onderling rechthoekig zijn. Bij scherpe tophoeken ontstaan twee ellipsen. Bij rechte tophoeken eene parabool en eene rechte lijn. Bij stompe hoeken twee hyperbolen [13]).

De vorm der lijnen werd nog onderzocht voor het geval dat de aspunten bezijden het middelpunt waren geplaatst en ook bij scheefhoekige ordinaten; in het algemeen bleek de kromme lijn steeds te behooren tot de kegelsneden [14]), en bleek dadelijk, welke soort er ontstond uit de verhouding van den afstand der aspunten tot den straal. Bij gelijkheid: parabool; grooter: ellips; kleiner: hyperbool.

Bij de behandeling van de lijnen van den 4den graad deed spreker nog uitkomen, dat de beschouwde constructiën kunnen beschouwd worden als bijzondere gevallen eener algemeene constructie, waarbij de cirkel en eene rechte naar willekeur worden aangenomen, benevens drie punten mede naar welgevallen, waarop als aspunten zich drie stelsels van stralen of rechte lijnen bewegen, en die door hunne onderlinge snijding

---

[13]) Dit wordt nader door figuren toegelicht op de vier in de vorige noot aangehaalde teekeningen. Met de tweede gelijkvormige lijn is bedoeld de tweede kegelsnede, welke naast de eerste als doorsnede optreedt, zoodat beiden te zamen de gedegenereerde vierdegraadsruimtekromme vormen, welke bij willekeurige plaatsing der kegels hunne doorsnede aangeeft.

[14]) Natuurlijk omdat bij de keuze der aspunten steeds werd zorg gedragen de punten B en C met het vergaarpunt A in het oneindige in ééne rechte te houden. Figuren hierop betrekkelijk vindt men op eene met I° gemerkte teekening.

aanleiding geven tot eene kromme lijn van den tweeden, vierden of hoogeren graad [15]).

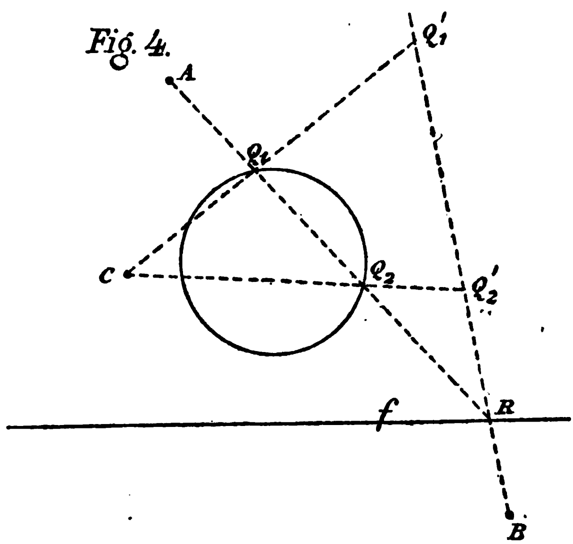
Bij een der behandelde bijzondere gevallen, waarbij een der aspunten op eindigen en de beide anderen op oneindigen afstand werden ondersteld, wees de spreker aan, dat de ontstaande kromme kon worden beschouwd als de projectie der doorsnede van een recht cirkelvormig kegelvlak met een parabolischen cylinder, hebbende tot parameter den afstand van het eindige aspunt tot het cirkelcentrum. De horizontale projectiën dezer doorsneden bleken te zijn epicycloiden (gewone, verlengde of verkorte), naar gelang van de plaatsing van het aspunt *in*, *binnen* of *buiten* den cirkelomtrek [16]).

Al het besprokene werd toegelicht met figuren uit de hand

---

[15]) De bedoelde constructie stemt overeen met de algemeene MACLAURIN'sche transformatie, zooals blijkt uit de figuur, waarvan het bovenstaande vergezeld is, en die wij hier reproduceeren, de letters weder plaatsende in overeenstemming met de verhandeling van SCHOUTE. Waarschijnlijk is het de bedoeling, dat de

Fig. 4.



krommen van hoogeren graad dan den vierden optreden kunnen door herhaling der transformatie. Zooals men weet, kunnen echter daarbij steeds slechts *unicursale* krommen ontstaan.

[16]) Zulke overgangen tot ruimtebeschouwingen waren zeer kenmerkend in de voordrachten van GODEFROY. De hier besprokene wordt toegelicht door eene fraaie teekening gemerkt I[P].

of op het bord met krijt geschetst en bovendien met acht stuks uitvoerige teekeningen [17]) met kleuren verduidelijkt, waarbij ten slotte nog werd opgemerkt, hoe men door voortzetting van projecteeren der gevonden punten tot nieuwe stelsels kromme lijnen kan geraken, waarbij zoowel het aspunt als de lijn, waarop geprojecteerd wordt, kunnen worden verplaatst [18]).

C. Overzicht der aanteekeningboekjes door A. N. Godefroy bij zijne voordrachten gebruikt en der bijbehoorende teekeningen.

N°. 1. Dit boekje heeft gediend bij de voordrachten van 24 *Dec.* 1873 en 28 *Januari* 1874. Voor de eerste dezer voordrachten verwijzen wij naar het kort verslag, dat hier vooraf is gegaan. Bij de tweede werd, naar aanleiding der in de eerstgenoemde voordracht besprokene transformatie van den cirkel in eene kegelsnede, waarvan een der brandpunten met het middelpunt van den voortbrengenden cirkel samenvalt, o.a. de poolvergelijking der kegelsneden opgemaakt, een drietal constructies voor de raaklijn en eene voor den kromtestraal afgeleid. Ten slotte werd eene benaderde constructie voor de ellips uit cirkelbogen aangegeven, welke men kan terugvinden op teekening N°. I°. Een kort verslag ook van deze voordracht bevindt zich onder de manuscripten.

N°. 2. *Voordracht van* 28 *Oct.* 1874. Bepaling der kromtestralen van kegelsneden in verband met hunne constructie door stelsels snijlijnen of stralenbundels. In deze voordracht zijn blijkbaar een groot

---

[17]) In werkelijkheid zijn er negen verschillende teekeningen gevonden, thans gemerkt I^G, I^H, I^J, I^K, I^L, I^M, I^N, I^O en I^P, welke alle op deze voordracht betrekking hebben of althans gemakkelijk er mede in verband kunnen worden gebracht.

[18]) Aan eene andere bewerking van het kort verslag van deze voordracht ontleenen wij nog de volgende, voor den spreker zeer kenmerkende zinsnede: „Na „nog tal van andere vormen dier lijnen te hebben aangetoond in uitgewerkte „figuren, besprak hij het bepalen der raaklijnen, en verder de wijze waarop bij „voortzetting van de gevolgde handelwijze geheele reeksen van kromme lijnen „van hoogere orde kunnen geacht worden te ontstaan met keerpunten, buigpunten „en knoopen Enkele dezer lijnen herinnerden aan bouwkunstige vormen, om„trekken van vazen, wrongen van schepen, enz.". Deze laatste zinsnede betreft waarschijnlijk vooral de vierdegraadskrommen op I^H.

aantal constructies dezer kromtestralen beschreven en met elkander in verband gebracht. Dit blijkt nog nader uit een bundeltje teekeningen met toelichting, aanwezig in eene kleine portefeuille (opgenomen in de groote), welke wij met II hebben gemerkt. Op een tiental afzonderlijke bladen zijn ongeveer even zoovele verschillende constructies uitgevoerd. De drie laatsten zijn naar SCHLÖMILCH, BRESSE en TERQUEM genoemd.

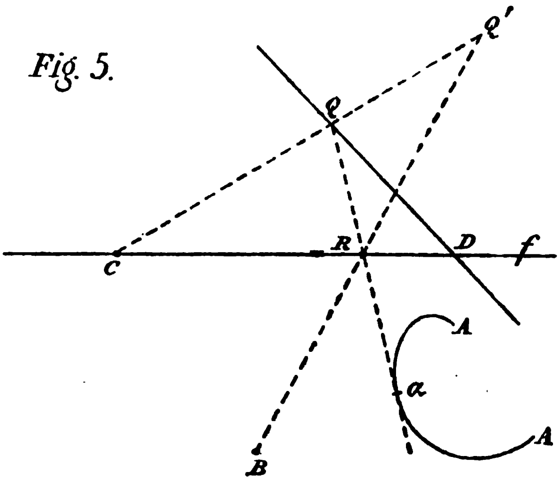
N°. 3. *Voordracht van* 27 *Oct.* 1875. **Vervorming van kegelsneden tot kromme lijnen van 3e en hoogere graden door middel van stralenbundels, en bepaling der raaklijnen.** De vervormingen geschieden met de MACLAURIN'sche transformatie (zie noot 4 en 15), welke hier meestal op den cirkel of de parabool wordt toegepast. Op die wijze ziet men o.a. ontstaan de semicubische parabool en door herhaling de parabolen van hoogere orde, de cissoïde van DIOCLES, de kromme van AGNESI en het folium van DESCARTES. (Vergelijk de verhandeling van SCHOUTE, aldaar p. 31.) Bij deze voordracht behooren drie teekeningen, gemerkt III^A, III^B en III^C, voorstellende de cissoïde, de kromme van AGNESI en het folium van DESCARTES.

N°. 4. *Voordracht van* 6 *Febr.* 1876. **Vervolg van het voorafgaande. Uitbreiding der MACLAURIN'sche transformatie*** [10]. In deze voordracht is *vooreerst* besproken eene toepassing der MACLAURIN'sche transformatie ter verkrijging der cissoïde, strophoïde en conchoïde, waarbij de richtlijn f naar het oneindige is verplaatst (verg. SCHOUTE, p. 24 en p. 32). *Ten tweede* wordt eene uitbreiding der MACLAURIN'sche transformatie aangegeven, die door nevensgaande figuur wordt voorgesteld, welke men vergelijke met fig. 2 van noot 4. Men zal dan bespeuren, dat de uitbreiding hierop neerkomt, dat het straalpunt A vervangen is door eene kromme AA, zoodat de vroeger door het vaste punt A gaande stralen AQ, welke op de richtlijn het punt R aanwijzen, thans raak-

[10]) Deze en de overige met een sterretje voorziene titels zijn niet van GODEFROY, die trouwens in 1876 zijne transformatie niet als de MACLAURIN'sche zoude hebben aangeduid. De niet met een sterretje voorziene zijn aan de aanteekenboekjes zelve of aan de opgave voor het Nieuw-Archief ontleend.

lijnen geworden zijn aan de gegeven kromme AA. Daarbij is de rechte QD de te vervormen lijn. Kiest men voor AA een cirkel of in het algemeen eene kegelsnede, dan beschrijft Q' in 't algemeen een kromme van den vierden graad, die echter afdaalt tot den derden, wanneer de bedoelde cirkel of

Fig. 5.



kegelsnede raakt aan de richtlijn *f*. Dit geval wordt voorgesteld op de teekeningen IV[A] en IV[B]. De raaklijn aan de getransformeerde kromme kan daarbij gemakkelijk gevonden worden door het raakpunt α, dat bij de constructie van het punt Q' gediend heeft, te beschouwen als een vast straalpunt. De getransformeerde van QD wordt daardoor eene kegelsnede, de getransformeerde kromme rakende in Q', en wier raaklijn daar ter plaatse gemakkelijk kan worden geconstrueerd.

Spreker merkt daarbij nog op, dat ook de straalpunten B en C en evenzeer de rechten RD en QD door gegeven krommen vervangen kunnen worden. Daardoor ontstaat een ruim veld van nieuwe transformaties, bij alle welke tevens de raaklijnconstructie gemakkelijk kan worden verricht, door namelijk de krommen, welke voor de vaste straalpunten opgetreden zijn, door de oogenblikkelijke raakpunten, en daarentegen de krommen QD en RS door hunne raaklijnen te vervangen.

Ten derde begeeft spreker zich in eene beschouwing van verschillende voetpuntslijnen (podaires) (zie SCHOUTE, l. c. p. 26).

Behalve de reeds besproken teekeningen, beheort ook bij

deze voordracht een gedeelte van III^c, aangevende de constructie der strophoïde, conchoïde en eene andere constructie der cissoïde, dan op III^A voorkomt. Alles natuurlijk met bijbehoorende raaklijn-constructies.

N°. 5. *Voordracht van* 31 *Jan.* 1877. Vervolg der toepassingen van de MACLAURIN'sche transformatie. Eene gewijzigde MACLAURIN'sche transformatie*[19]. Vooraf gaat eene nadere beschouwing der MACLAURIN'sche transformatie ter verkrijging der strophoïde en conchoïde uit den cirkel, waarbij in het bijzonder gelet wordt op de meetkundige plaats van het snijpunt der raaklijnen in de overeenkomstige punten van den cirkel en van de verkregen kromme. Die meetkunstige plaats vindt men op teekening V^A voor de strophoïde (waar zij met den limaçon van PASCAL overeenkomt), en op V^B voor de conchoïde voorgesteld. Het snijpunt bij SCHOUTE, evenals in onze figuur 3, steeds door de letter U aangeduid, speelt inderdaad bij de constructie der raaklijn aan de getransformeerde kromme eene gewichtige rol.

Daarna volgt de beschrijving van eene transformatie, die met de MACLAURIN'sche in verband kan worden gebracht door het straalpunt A ongewijzigd te laten bestaan, de lijn in het oneindige tot richtlijn *f* te kiezen, maar de beide straalpunten B en C op de bij de vorige voordracht beschrevene wijze door parabolen te vervangen. Zij wordt in plaat V^C toegepast op de raaklijn aan den top van de parabool CC en levert zoo eene derdegraadskromme. Op eene andere teekening V^D, waarschijnlijk evenzeer bij deze voordracht behoord hebbende, is daarentegen het straalpunt B onveranderd blijven bestaan.

Eindelijk volgden beschouwingen over den kromtestraal van het folium van DESCARTES en van de parabolen van hoogere orde, hunne ontwondenen en vervormingen.

N°. 6. *Voordracht van* 31 *Oct.* 1877. Kromtestraalconstructie door hulpfiguur. Uit de analytische uitdrukking voor den kromtestraal wordt eene constructie afgeleid, die een eenvoudig karakter aanneemt zoo vaak de uitdrukking $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-2}$ eene constante is of althans onder een eenvoudigen vorm kan gebracht worden. Toepassing op

de krommen $y = a^x$, $x^m y^n = p^{m+n}$, $a^n x^m + b^m y^n = p^{m+n}$; meer in het bijzonder op de kegelsneden. Geene hierbij behoorende teekeningen zijn gevonden.

N°. 7. *Voordracht van* 1878. **Bepaling der normaal aan onderscheidene soorten van podaires of voetpuntslijnen met daaruit afgeleide krommen.** Eene eenvoudige constructie punt voor punt wordt voor de voetpuntslijnen der parabool aangegeven en daarna voor deze krommen eene raaklijn-constructie afgeleid, berustende op de welbekende voor de voetpuntslijnen van den cirkel. Daaruit volgt dan weer de raaklijn-constructie aan eene kromme, wier elementen telkens geacht kunnen worden samen te vallen met die van de voetpuntslijnen eener parabool, waaruit dan op hare beurt wordt verkregen de raaklijn-constructie aan de op plaat V^B (zie voordracht N°. 5) geconstrueerde kromme, welke vervolgens nog eenigermate wordt gegeneraliseerd.

Evenzeer wordt besproken de overeenkomstige meetkundige plaats bij het folium van DESCARTES en een paar transformaties van de rechte lijn, bij welke de raaklijn-constructie gelukt door terugvoering tot de gegeneraliseerde MACLAURIN'sche transformatie bij voordracht N°. 4 nader aangeduid.

Eindelijk vindt men als eene ontwerp-prijsvraag het algemeene vraagstuk gesteld, om bij toepassing der MACLAURIN'sche transformatie de kromtestraal der getransformeerde kromme te vinden, als die van de te transformeeren kromme gegeven is [20]). Ongetwijfeld in verband daarmede wordt de constructie van den kromtestraal voor de cissoïde en strophoïde geschetst. De prijsvraag is werkelijk gesteld voor 1880—1884.

Bij deze voordracht zijn geene teekeningen gevonden, maar in het aanteekenboekje zelve, zooals in vele anderen, zijn vrij uitvoerige, gekleurde schetsen aangebracht.

N°. 8. *Voordracht van* 26 *Febr.* 1881. **Kromme lijnen van den derden graad uit parabool en cirkels afgeleid.** Spreker heeft opgemerkt, dat bepaalde krommen van den derden graad, in het bijzonder die welke een gesloten tak vertoonen, door zijne transformatie niet uit den cirkel, noch

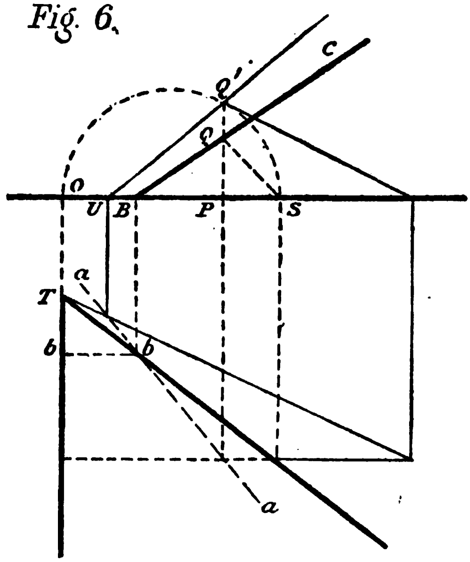
---

[20]) Zie daaromtrent een opstel van Dr. P. H. SCHOUTE in deze zelfde aflevering.

uit de parabool kunnen verkregen worden. (Inderdaad levert de MACLAURIN'sche transformatie, op kegelsneden toegepast, slechts unicursale derde- en vierdegraadskrommen.) Hij zoekt daarom naar eene andere transformatie, waarmede dit doel wèl te bereiken valt, en geraakt nu langs analytischen weg tot de volgende in het bovenste gedeelte van fig. 6 voorgestelde. Daarbij is Q een punt der te transformeeren kromme, O een vast punt, PQS een gelijkbeenigen rechthoekigen driehoek, OQ'S een cirkel op OS als middellijn beschreven, Q' een punt der getransformeerde kromme.

Beschrijft Q eene rechte BC, zooals in onze figuur is aangegeven, dan levert Q' eene kegelsnede; welke gemakkelijk blijkt

Fig. 6.



te kunnen worden opgevat als de verticale projectie van de doorsnede van een verticaal plat vlak, welks horizontale doorsnede door *aa* wordt voorgesteld, met een scheeven cirkelvormigen kegel, welke het punt T in het horizontale vlak tot top heeft en den verticalen cirkel, op *bb* der grondlijn beschreven, als richtlijn.

Deze ruimtebeschouwing voert dan onmiddellijk tot de constructie der raaklijn UQ', welke constructie wij in onze figuur door de dunne getrokken lijnen hebben aangegeven.

Daaruit volgt dan weder de raaklijn-constructie bij de trans-

formatie eener willekeurige kromme, welke immers tot dat doel in het te transformeeren punt Q door hare raaklijn BQ kan vervangen worden.

Soortgelijke ruimtebeschouwingen doen de uit parabolen en cirkels ontstaande derdegraadskrommen kennen als doorsneden van oppervlakken, die op eenvoudige wijze door cirkels beschreven kunnen worden. Deze opmerking voerde spreker voor het eerst op het gebied der derde- en vierdegraadsoppervlakken, waarover vele der latere voordrachten handelen.

Bij deze voordracht behoort een blad, gemerkt VIII, met meer dan dertig teekeningen van uit den cirkel afgeleide vierdegraadskrommen, allen zich zelven rakende in het punt O en in het algemeen van het geslacht één. Derdegraadskrommen van dit geslacht worden verkregen door de constructie toe te passen op kegelsneden met eene asymptotenrichting loodrecht op OP. Daarvan zijn echter geene teekeningen voorhanden.

N°. 9. *Voordrachten van* 14 *Dec.* 1881 *en* 14 *Maart* 1883. Kromme lijnen door stralenbundels bepaald en beschouwd als projectiën van kromme lijnen in de ruimte. Verschillende der vroeger besproken lijnen, nam. de in noot 16 aangehaalde, de conchoïde, de strophoïde, de cissoïde en in een toevoegsel van 23 Dec. 1881 ook het folium van DESCARTES, worden hier beschouwd als projectiën van ruimtekrommen, verkregen door de doorsnijding van tweedegraadskegels en cylinders in bijzondere standen geplaatst, van welke ruimtekrommen daarna ook andere projectiën worden geconstrueerd. Twee der platen, gemerkt IX^A en IX^B hebben betrekking op dit toevoegsel, hetwelk is voorgedragen op 14 *Maart* 1883. (Zie bij N°. 12.)

N°. 10. *Voordrachten van* 21 *Febr.* 1883 *en* 26 *November* 1884. Doorsnijding van cirkels en hoeken, die in hetzelfde vlak gelegen zijn, in verband met de wijze waarop deze verondersteld worden te ontstaan. *Eerste gedeelte.* De cirkel of hoek als stralenbundel, ontstaan door draaijing van eene regte lijn om een vast punt. Ontdaan van de eenigermate zonderlinge inkleeding, waarbij bijv. twee elkaar doordringende vlakke figuren geacht worden elkander te snijden volgens eene

bepaalde lijn, welke niets anders is dan de meetkunstige plaats der snijpunten van de krommen of rechten, door wier voortbeweging de vlakke figuren worden ondersteld te zijn ontstaan, houdt deze voordracht zich hoofdzakelijk bezig met de krommen, wier bipolaire-poolhoekenverg. voorgesteld worden kan door $\varphi_2 = n\varphi_1$. Een naschrift van 20 April 1884, voorgedragen 26 *Nov.* '84, bevat eene nadere beschouwing der hyperbool $\varphi_2 = 2\varphi_1$ en der trisectrix $\varphi_2 = 180^\circ - 3\varphi_1$. Bij deze voordracht behooren twee teekeningen, gemerkt X^A en X^B, waarop verschillende kromme lijnen zijn voorgesteld met lineaire bipolaire-poolhoekenvergelijkingen. Daarbij wordt ook het geval beschouwd, dat een der polen naar het oneindige gaat, wat aanleiding geeft tot het ontstaan der quadratrix.

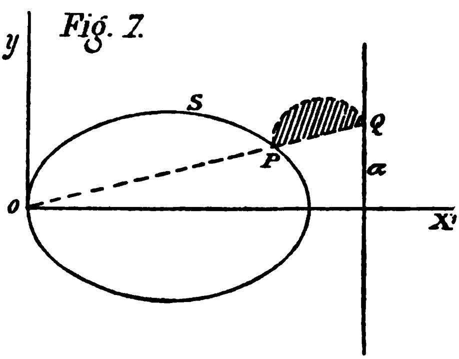
N°. 11. *Voordracht van* 21 *Febr.* 1883. *Tweede gedeelte.* Het cirkelvlak ontstaan uit concentrische omtrekken, wier aantal evenredig is aan den straal, onafhankelijk van eenigen bepaalden hoek. Overeenkomstige beschouwing van den cirkel $r_2 = nr_1$ als de doordringing van twee cirkels, elk voor zich door concentrische cirkels voortgebracht. Toepassing van hetzelfde beginsel op ruimtefiguren. Aanvang der later voortgezette beschouwingen over derdegraadsoppervlakken. Bij deze voordracht behooren drie teekeningen, XI^A, XI^B en XI^C, voorstellende verschillende zoogenaamde doordringingen van cylinder- en bol- en van kegel- en bolruimten.

N°. 12. *Voordrachten van* 14 *Maart* 1883 *en* 26 *Nov.* 1884. De kromme lijn van de derde macht, waardoor een hoek in drie gelijke deelen wordt gedeeld; afleiding van deze kromme uit den cirkel, enz. De trisectrix wordt hier beschouwd op de door Schoute l. c. p. 24 besprokene wijze. In verband daarmede wordt in herinnering gebracht de soortgelijke constructie (door de Maclaurin'sche transformatie) van strophoïde, cissoïde en conchoïde. Zie voorts over deze voordracht het onder N°. 9 vermelde. Dit aanteekenboekje heeft tevens gediend voor eene voordracht, gehouden 26 *Nov.* 1884, over de driedeeling van den hoek, de trisectrix, en eene daartoe dienstige voetpuntslijn van den cirkel, en over eene benaderde rectificatie van cirkelbogen door Lambert.

N°. 13 en 14. *Voordracht van* 21 *Nov.* 1883. **Constructiën van oppervlakken van den derden graad door kegelsneden van veranderlijken parameter, in verband met onveranderlijke kegelsneden en eene rechte lijn.** Aanvankelijk, blijkens den titel van het laatste gedeelte der voordracht van 14 Maart 1883, vermeld in het *Nieuw Archief*, deel XI, p. 47, letter *c*, met het doel om de verschillende soorten van derdegraadskrommen te doen optreden als doorsneden van éénzelfde oppervlak, heeft Godefroy verschillende ontstaanswijzen van cubische oppervlakken bedacht, welke uit een constructief oogpunt zoo eenvoudig mogelijk gekozen zijn geworden. Dewijl het onderzoek van de zoo verkregen oppervlakken Godefroy geruimen tijd bezig gehouden heeft, zullen wij hier omtrent die ontstaanswijzen in eenige meerdere bijzonderheden treden, daarbij in hoofdzaak Godefroy's aanteekeningen ten grondslag leggende.

Zij kunnen tot een *drietal* worden teruggebracht.

Fig. 7.



Bij de *eerste* worden aanvankelijk als richtlijnen gekozen eene willekeurige kegelsnede S en eene rechte lijn α loodrecht op de as dezer kegelsnede, beiden in het vlak van teekening. Als beschrijvende lijnen doen daarbij dienst ellipsen of hyperbolen, gelegen in vlakken loodrecht op het vlak van teekening, allen *onderling gelijkvormig*, terwijl een hunner assen telkens begrensd wordt door de snijpunten P en Q van een door den top O der kegelsnede S getrokken straal met de kegelsnede S en met de rechte α. (Zie nader fig. 7 waar de helft van eene der beschrijvende kegelsneden op het vlak van teekening is neergeslagen).

Stelt men nu voor de vergelijking der kegelsnede S:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx = 0$$

dan wordt gemakkelijk voor de vergelijking van het oppervlak verkregen:

$$kxz^2(Ax^2 + By^2) + (x^2 + y^2)(x - a)(Ax^2 + By^2 + 2Cx) = 0$$

alwaar k de onderlinge verhouding aanwijst der vierkanten der assen van de bewegende kegelsnede.

Deze vergelijking is van den vijfden graad. Kiest men echter voor de kegelsnede S een cirkel

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

dan gaat zij over in de derdegraadsvergelijking:

$$kxz^2 + (x - a)(x^2 + y^2 - 2rx) = 0.$$

Voor Godefroy zijn nu bijzonder belangrijk die oppervlakken, waarbij ook de beschrijvende kegelsneden door cirkels of desnoods door gelijkzijdige hyperbolen worden gevormd. Derhalve de gevallen $k = 1$ en -1.

Laten wij er bijvoegen, dat de verkregen oppervlakken allen vier knooppunten bezitten en dus in het algemeen projectief zijn met Schläfli's „species XVI 1, 2 of 3", d. w. z. met de oppervlakken met vier reeële, twee reeële en twee imaginaire, of met vier imaginaire knooppunten. (*Phil. Trans.* 1863. Vol. 153, p. 193.)

Die knooppunten bestaan namelijk 1e uit de snijpunten der kegelsnede S met de rechte α, 2e uit twee punten op de Z-as op afstanden $\sqrt{\dfrac{-2ar}{k}}$ aan weerskanten van het vlak van teekening gelegen, welke laatste bijzonderheid gemakkelijk uit de beschouwing der doorsneden met vlakken $y = mx$ af te leiden is, welke doorsneden allen door deze punten heengaan.

Het oppervlak met vier reeële knooppunten kan overigens natuurlijk slechts met behulp van hyperbolen verkregen worden. Anders is het echter met de beide andere soorten van oppervlakken, Schläfli's XVI 2 en 3. Deze kunnen met behulp van cirkels alleen verkregen worden.

Voor hen vooral kan Godefroy's ontstaanswijze inderdaad uit een constructief oogpunt als zeer eenvoudig en fraai worden aangemerkt en als bijzonder geschikt om, zelfs zonder model, eene duidelijke voorstelling omtrent hunne gedaante te geven.

Als overgangsgeval, wanneer de cirkel S de rechte α raakt, treedt daarbij op SCHLÄFLI's XVIII, 2. GODEFROY's constructie uitsluitend met cirkels, welke een oppervlak levert, dat als projectieve afbeelding van alle overigen van deze soort dienst kan doen, is ook hier zeker niet minder fraai dan de door SCHLÄFLI aangegevene met parabool en bewegelijken cirkel. Gebruikt men daarentegen in dit overgangsgeval voor de bewegende krommen gelijkzijdige hyperbolen, dan zal SCHLÄFLI's XVIII, 1 ontstaan.

Hetzelfde oppervlak (XVIII, 2) verkrijgt men overigens door den cirkel S tot een enkel punt samen te trekken[21]). Trouwens zulk eene dubbele ontstaanswijze uit cirkels is ook eigen aan het algemeene oppervlak in geval er van de knooppunten twee of vier onbestaanbaar zijn, zooals gemakkelijk is in te zien. Men beschouwe slechts de in het, op het vlak van teekening loodrechte, symmetrievlak gelegen cirkel als de vaste cirkel der nieuwe ontstaanswijze en de vroegere vaste cirkel als een der bewegelijke, waarbij dan de vroegere rechte α thans als wentelingsas der bewegelijke cirkels dienst doet.

Een ander bijzonder geval doet zich voor als de lijn α naar het oneindige gebracht wordt. De vergelijking van het oppervlak gaat dan over in:

$$kxz^2 + x^2 + y^2 - 2rx = 0,$$

waarbij thans twee imaginaire knooppunten naar het oneindige zijn gegaan. De beide anderen kunnen reeël of imaginair zijn. De beschrijvende kegelsneden zijn daarbij parabolen geworden, wier toppen zich langs den cirkel bewegen, terwijl hunne parameters omgekeerd evenredig zijn met OP of, als men wil, recht evenredig met OQ, alwaar thans de door Q beschrevene rechte eene willekeurige lijn is, loodrecht op OX. Als zoodanig vindt men deze ontstaanswijze bij GODEFROY beschreven.

Is bovendien $r = 0$, dan treedt natuurlijk weder SCHLÄFLI's XVIII, 2 op.

---

[21]) De *oppervlakken* stemmen, namelijk, bij beide ontstaanswijzen overeen. Denkt men zich echter de cirkels gevuld, dan is het eene lichaam als het ware het negatief van het andere.

Wij gaan thans over tot GODEFROY's *tweede* ontstaanswijze.

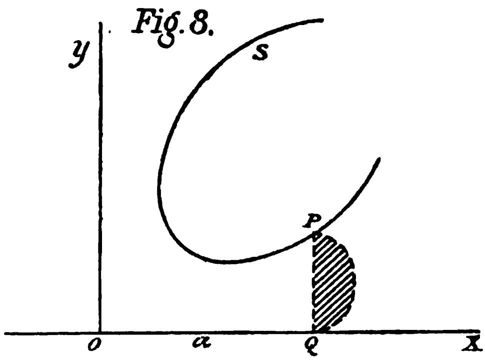


Fig. 8.

Daarbij beschouwen wij (fig. 8) eene geheel willekeurige in het vlak van teekening gekozen kegelsnede:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \\ + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

en eene rechte α die wij tot X-as kiezen.

De onderling gelijkvormige kegelsneden kiezen wij thans in evenwijdige vlakken, allen loodrecht op de X-as, terwijl hunne assen wederom bepaald worden door de snijpunten P en Q.

De algemeene vergelijking van het zoo ontstaande oppervlak luidt als volgt:

$$Ax^2y^2 + 2Bxy\,(y^2 + kz^2) + C(y^2 + kz^2)^2 + 2Dxy^2 + 2Ey\,(y^2 + kz^2) + \\ + Fy^2 = 0.$$

Een cubisch oppervlak ontstaat derhalve als $C = 0$ is, d. w. z. zoodra de Y-as evenwijdig loopt met eene der asymptotenrichtingen der kegelsnede S, of, indien deze eene parabool mocht voorstellen, met hare as.

Ook dit oppervlak vertoont weder vier knooppunten, die twee aan twee bestaanbaar of onbestaanbaar zijn, terwijl er ook twee samenvallen kunnen. Deze knooppunten zijn 1^e^ de snijpunten der kegelsnede met de rechte α, 2^e^ de punten in het oneindige der beschrijvende kegelsneden.

In het bijzondere geval dat S eene parabool, α de raaklijn in haar top voorstelt, verkrijgt men de zoo straks aangeduide constructie van SCHLÄFLI voor een oppervlak XVIII, 2.

Uit een constructief oogpunt is het natuurlijk wenschelijk voor de bewegende kegelsneden cirkels te kiezen, voor de vaste kegelsnede S is dit echter niet mogelijk, daar zij bestaanbare asymptotenrichtingen bezitten moet.

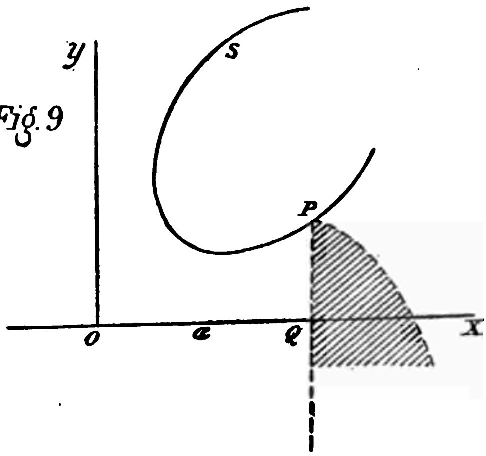
Wordt de lijn α naar het oneindige gebracht, dan gaan de beschrijvende lijnen weder over in parabolen, zooals in fig. 9 is aangewezen. Deze parabolen hebben thans echter een standvastigen parameter.

Voor de verg. van het oppervlak wordt daarbij weder gemakkelijk gevonden:

$$Ax^2 + 2Bx(y + kz^2) + C(y + kz^2)^2 + 2Dx + 2E(y + kz^2) + F = 0,$$

wederom afdalende tot den derden graad voor het geval $C = 0$.

Fig. 9



Deze bijzondere ontstaanswijze blijkt nu steeds te voeren tot SCHLÄFLI's „species XIX", dat wil zeggen tot een oppervlak van de vierde klasse met een gewoon en een tweevlaksknooppunt, beide echter in het oneindige gelegen [22]). Dit oppervlak is trouwens asymptotisch projectief met dat met vier reëele knooppunten. (Verg. *Nieuw Archief*, XX, 1892, p. 93—95).

---

[22]) Dit kan bijv. algebraïsch bewezen worden als volgt. Maken wij eerst de vergelijking homogeen, dan luidt zij:

$$Ax^2\lambda + 2Bxy\lambda + 2(Bx + E\lambda)kz^2 + 2Dx\lambda^2 + 2Ey\lambda^2 + F\lambda^3 = 0.$$

Door de lineaire substitutie $Ax + 2By = u$ kan zij, na eliminatie van y, gebracht worden in den vorm:

$$Bux\lambda + 2B(Bx + E\lambda)kz^2 + (2BD - AE)x\lambda^2 + Eu\lambda^2 + BF\lambda^3 = 0.$$

De nieuwe substitutie $Bx + E\lambda = v$ voert dan tot:

$$Buv\lambda + 2B^2kvz^2 + (2BD - AE)v\lambda^2 + [B^2F + AE^2 - 2BED]\lambda^3 = 0$$

en eindelijk de substitutie $Bu + (2BD - AE)\lambda = w$ tot den door SCHLÄFLI p. 238 aangegeven vorm, nam. hier:

$$vw\lambda + 2B^2kvz^2 + [B^2F + AE^2 - 2BED]\lambda^3 = 0.$$

Kiest men nu het tetraëder $v = 0$, $w = 0$, $z = 0$, $\lambda = 0$ tot fundamentaaltetraëder, dan is het duidelijk, dat in het hoekpunt tegenover $v = 0$ een gewoon, in dat tegenover $w = 0$ een tweevlaksknooppunt aanwezig is. Dewijl voor beide knooppunten echter $\lambda = 0$ is, moeten zij beiden oorspronkelijk in het oneindige gelegen zijn geweest.

Drie dezer knooppunten zijn in het tweevlaksknooppunt samengevallen, zooals ook meetkundig gemakkelijk is in te zien, als men nagaat, wat er van de vier knooppunten van het algemeenere oppervlak geworden is.

Eindelijk beschouwen wij GODEFROY's *derde* ontstaanswijze. Deze kan uit de bij fig. 9 behoorende door de volgende wijzigingen worden afgeleid: *vooreerst* plaatse men den top der beschrijvende parabolen op de rechte OX, dus in Q in plaats van in P; *ten tweede* late men hun parameter veranderen evenredig met QP.

Voor de vergelijking van het oppervlak wordt dan verkregen:

$$Ax^2y^2 + 2Bkz^2y + Ck^2z^4 + 2Dxy^2 + 2Ekz^2y + Fy^2 = 0,$$

waaruit blijkt, dat voor $C = 0$ weder een derdegraadsoppervlak ontstaat.

Dit oppervlak is steeds eene XVIII, 1 of 2. De snijpunten der kromme met OX leveren namelijk de beide gewone knooppunten, het aan alle bewegelijke parabolen gemeenschappelijke punt in het oneindige het tweevlakspunt.

Overigens wordt het verband van deze *derde* ontstaanswijze met de vorige het gemakkelijkst ingezien door de bewegelijke parabolen te veralgemeenen tot onderling gelijkvormige kegelsneden met één der toppen steeds in Q, een der assen langs PQ en de parameter p der topvergelijking evenredig met PQ.

In dit meer algemeene geval toch beschrijft de tweede top eene kegelsnede, zoodat de ontstaanswijze dan met de tweede van GODEFROY samenvalt.

Thans meer in bijzonderheden omtrent de aanteekenboekjes tredende, vermelden wij nog slechts, dat in N°. 13 behalve vele voorbeelden der verschillende ontstaanswijzen, eene beschouwing over het kegelvlak $z^2x = y^3$ te vinden is. N°. 14 behandelt daarentegen vooral de bijzondere gevallen aan het slot der eerste ontstaanswijze besproken. Bekende derdegraadskrommen worden als doorsneden verkregen.

Hoewel deze voordracht, blijkens *Nieuw Archief*, deel XI, p. 47 met vele teekeningen opgeluisterd werd, zijn de meesten van deze niet bewaard gebleven, maar waarschijnlijk vervangen

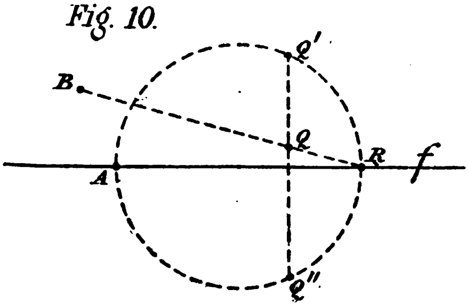
door de later bij N°. 21 te vermelden uitvoeriger teekeningen van cubische oppervlakken.

Slechts twee teekeningen gemerkt XIV[A] en XIV[B] willen wij hier aanvoeren. Zij stellen oppervlakken voor verkregen door de tweede ontstaanswijze met vaste parabool en bewegelijken cirkel en eenige hunner vlakke doorsneden.

N°. 15. *Voordracht van* 21 *Jan.* 1885. **Constructiën van kegelvlakken en van wigvormige of scheeve oppervlakken, waarbij enkele van den derden graad, en over de kromme lijnen, die door de snijding met platte vlakken ontstaan.** Door middel van kegeloppervlakken worden de cubische krommen met middelpunt afgeleid uit die met eene as van symmetrie. Door middel van conoïdale oppervlakken worden cubische krommen uit kegelsneden verkregen.

N°. 16. *Voordracht van* 16 *Dec.* 1885. **Doorsneden van de wig van Wallis met platte vlakken in het algemeen en in het bijzonder eenige, die door eene beschrijvende lijn van het oppervlak gaan.** Deze laatste doorsneden zijn, daar de wig van Wallis van den vierden graad is, natuurlijk cubische krommen van vele verschillende gedaanten. Vermelding verdient voorts eene transformatie (1, 2), in nevensgaande figuur afgebeeld, die als eene uitbreiding der bij N°. 8 besprokene kan worden beschouwd en waardoor op eenvoudige wijze uit gegeven rechte lijnen symmetrische derdegraadskrommen met een asymptoot op eindigen afstand verkregen worden. A en B zijn hier vaste punten, Q het te transformeeren punt, f eene vaste lijn, AR de middellijn van een veranderlijken cirkel, Q′ en Q″ de uit Q ontstaande punten.

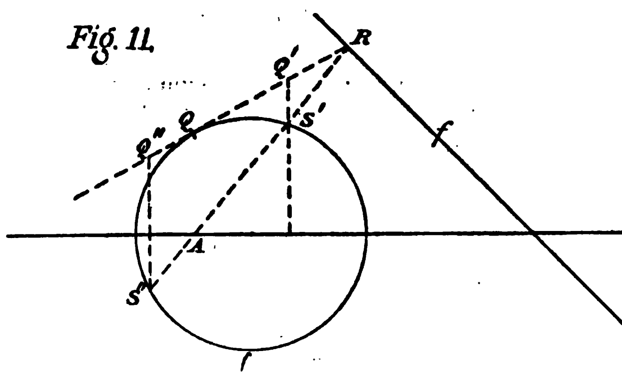
Fig. 10.



No. 17. *Voordracht van* 16 *Maart* 1887. Over conchoïden en de raaklijnen daaraan. Derdemachtslijnen en oppervlakken afgeleid uit kegelsneden. Transformatie door cirkels en bepaling der normaal uit de afgeleide. Eene door De Gelder aangegevene transformatie van den cirkel wordt tot de Maclaurin'sche teruggevoerd. Raaklijnconstructies aan de conchoïde en verwante krommen. Beschrijving eener nieuwe transformatie van die van fig. 10 daardoor verschillende dat 1° B naar het oneindige gaat, 2° R als middelpunt van den cirkel dienst doet, 3° de lijnen Q'Q" met de as f evenwijdig loopen. Derdegraadsoppervlakken voornamelijk volgens de tweede, bij N°. 13, 14 beschrevene, ontstaanswijze. Toepassing eener transformatie $x' = x$; $y' = \sqrt{xy}$, afgeleid uit die van figuur 10, door B in het oneindige en $\angle$BRA $= 45°$ te nemen, welke transformatie dus geheel overeenstemt met de bij N°. 8 besprokene.

No. 18. *Voordracht van* 14 *Dec.* 1887. Transformatiën van den cirkel in vijfdemachtskrommen door raaklijnen. De grondslag van het onderzoek wordt gevormd door eene transformatie van den cirkel, die in de meest algemeene

Fig. 11.



gedaante, waarin zij door Godefroy is gebracht, door fig. 11 wordt voorgesteld. Q is hier het te transformeeren punt, QR eene raaklijn aan den cirkel, terwijl A een vast centrum, f eene vaste lijn is. De lijn AR bepaalt de punten S' en S" en daarna de punten Q' en Q", die voor Q in de plaats treden.

De door deze punten Q' en Q" beschrevene kromme is *in het algemeen* aan den achtsten graad, en bezit o.a. de eigenschap

van, waar zij den cirkel bereikt, dezen te raken, daarbij steeds blijvende aan hare buitenzijde.

Valt echter het vaste punt A op een der beide uiteinden van de middellijn van den cirkel, dan splitst zich de raaklijn in dit punt driemaal van de kromme af en daalt deze derhalve tot den vijfden graad.

Opmerkelijk is ook het geval, dat de vaste lijn f naar het oneindige is gegaan en het straalpunt A met het middelpunt van den cirkel samenvalt, dewijl in dat geval de kromme zich splitst in twee vierdegraadskrommen, waarvan de eene beschreven wordt door het punt Q', de andere door Q'', tusschen welke beide punten alsdan onderscheid kan worden gemaakt.

Voor deze laatste nu wederom unicursale vierdegraadskrommen, welke met zich zelve in het oneindige eene aanraking van de tweede orde hebben (zoodat dit aanrakingspunt voor drie dubbelpunten telt), wordt tevens eene hoogsteenvoudige raaklijn-constructie aangegeven. Men vindt hen afgebeeld op teekening XVIII^{A} [23]), waarop tevens twee achtstegraadskrommen voorkomen, welke door excentrische plaatsing van het straalpunt A ontstaan; terwijl teekening XVIII^{B} eenige der zooeven besproken vijfdegraadskrommen aangeeft. Voorts vindt men op XVIII^{C} en XVIII^{D} nog meerdere door deze zelfde transformatie ontstane krommen bij bijzondere plaatsingen van de vaste lijn f, op de teekeningen poollijn genoemd, en van het straalpunt A, welke plaatsingen ten deele, bijv. als de vaste lijn f eene raaklijn van den cirkel is, tot graadsverlaging voeren.

Enkele dier krommen kunnen met voordeel beschouwd worden als ontstaan door de ordinaten van eenvoudiger krommen te sommeeren. Dit geeft GODEFROY aanleiding op teekening XVIII^{E} zulke som- en verschilkrommen voor de cissoïde, de strophoïde en de trisectrix met den cirkel, waaruit zij door de MACLAURIN'sche transformatie ontstaan zijn, af te beelden. (Zie in verband hiermede SCHOUTE, t. a. p. p. 31.)

Ten slotte wordt de transformatie ook op kegelsneden uitgebreid en worden enkele vijfdegraadsoppervlakken besproken, verkregen volgens de *eerste* der bij de voordracht van 21 Nov. 1883 aangegeven ontstaanswijzen, waarbij echter ook wel de

---

23) Deze en al de andere bij deze voordracht behoorende teekeningen vindt men op de achterzijde van bij de eerste voordracht gediend hebbende teekeningen.

in fig. 7 aangegeven bewegende onderling gelijkvormige kegelsneden door parabolen vervangen worden, wier parameters met PQ, en dus niet zooals daar met OQ, evenredig zijn. Deze ontstaanswijze levert namelijk vijfdegraadsoppervlakken als de kegelsnede S in een cirkel overgaat.

N°. 19. *Voordracht van* 17 *April* 1889. De zoogenaamde derdemachtscirkel en de daarmede in verband staande derdemachtsoppervlakken. In deze voordracht worden drie verschillende constructies besproken van de kromme $x^3 + y^3 = a^3$, aan welke door E. Dühring den naam van derdemachtscirkel is gegeven. Elk van deze constructies kan worden opgevat als eene ruimteconstructie, opleverende de doorsnede van een plat vlak met een cubisch oppervlak. De *eerste* van deze voert tot het cubisch oppervlak $z^3 = (a - x)(a^2 + ay + y^2)$ of, op andere assen, $z^3 = - x(y^2 + \frac{3}{4} a^2)$. Dit oppervlak is afgebeeld op teekening XIX^A, waar ook nog eenige constructies van andere derdegraadskrommen, nam. van de cubische hyperbool $xy^2 = a^3$ en de Neil'sche parabool $x^3 = ay^2$ aangegeven zijn. Als eene soort tegenstelling is daarenboven op teekening XIX^B de constructie uitgevoerd van het oppervlak $z^3 = x(a^2 - y^2)$.

De *tweede* constructie voert tot de oppervlakken $3yz^2 = (a^2 + ay + 3xy - 2y^2)(a - x)$ en $3yz^2 = (a^2 + ay + 4y^2 - 3xy)(x - a)$, welke beiden, volgens de tweede, bij N°. 13 en 14 besprokene, ontstaanswijze, kunnen worden voortgebracht zooals men onmiddellijk inziet, indien men snijvlakken y = constante aanbrengt, welke cirkels opleveren, en daarna het symmetrievlak $z = 0$ onderzoekt. Beide deze oppervlakken zijn afgebeeld op teekening XIX^C.

De *derde* constructie kunnen wij hier laten rusten. Daarentegen hebben wij nog te vermelden eene teekening XIX^D, voorstellende het oppervlak $z^3 = axy$.

N°. 20. *Voordracht van* 30 *Oct.* 1889. Over het verband tusschen den cirkel en de toegevoegde gelijkzijdige hyperbool met dezelfde middellijn. Een vrij uitvoerig overzicht van deze voordracht vindt men in het *Nieuw Archief*, deel XVIII, p. 119—121.

N°. 21. *Voordracht van* 21 *Maart* 1891. Over eene

bipodaire (of voetpuntskromme) van den zesden graad met 6 knooppunten, bepaling van de normaal. *Toevoegsels:* 1[e] Beknopt overzicht van eenige oppervlakken van den derden graad, 2[e] Transformatie van kromme lijnen door stralenbundels en bepaling der raaklijnen van ieder geconstrueerd punt.

Van de voordracht zelf is een overzicht verschenen in het *Nieuw Archief*, deel XVIII, p. 151–152.

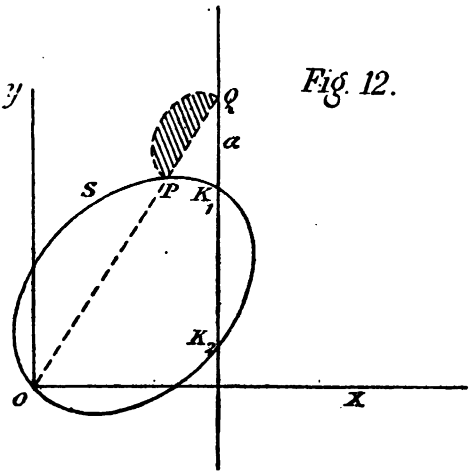


Fig. 12.

Omtrent het *eerste toevoegsel* valt op te merken, dat GODEFROY hier behalve de bij N⁰. 13 en 14 besprokene ontstaanswijzen er nog eene meer algemeene behandelt, welke tot oppervlakken met twee knooppunten, dus in het algemeen tot SCHLÄFLI's „Species IV. 1, 2, 3, 4, 5, 6", en als overgang, indien de twee knooppunten samenvallen, tot zijne „Species V. 1, 2, 3, 4" voert.

Ook bij deze meer algemeene ontstaanswijze zijn de beschrijvende lijnen onderling gelijkvormige kegelsneden, waarvoor dus cirkels of gelijkzijdige hyperbolen kunnen gekozen worden.

Zij kan uit de eerste bij N⁰. 13, 14 besprokene ontstaanswijze worden afgeleid door de aldaar optredende kegelsnede te vervangen door ééne, welke wel door O heengaat (zie fig. 12), maar overigens gansch willekeurig gekozen wordt.

Stelt men voor de vergelijking dier kegelsnede:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0,$$

dan wordt voor de vergelijking van het oppervlak gevonden:

$$kxz^2 (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) +$$
$$+ (x^2 + y^2)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey)(x - a) = 0$$

derhalve in het algemeen een oppervlak van den vijfden graad. Neemt men evenwel voor de kegelsnede een cirkel:

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey = 0$$

dan ontstaat een cubisch oppervlak, dat tot vergelijking heeft:

$$kxz^2 + (x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey)(x - a) = 0.$$

Als dubbelpunten treden daarbij op de snijpunten K_1 en K_2 der lijn α met den cirkel S.

Een drietal uitvoerige teekeningen kunnen als bij dit toevoegsel behoorende worden beschouwd. Op de eerste, gemerkt XXI^A, vindt men een oppervlak met vier bestaanbare knooppunten afgebeeld, verkregen volgens de eerste bij N°. 13, 14 besproken ontstaanswijze. XXI^B bevat een evenzoo verkregen oppervlak, waarbij echter twee der vier knooppunten tot een tweevlakspunt zijn samengevallen en tevens een ander oppervlak, verkregen door de zoo even beschrevene meer algemeene ontstaanswijze, met een voor twee knooppunten tellend tweevlakspunt. XXI^C eindelijk vertoont een volgens deze algemeene ontstaanswijze verkregen oppervlak met twee reeële knooppunten.

Het *tweede toevoegsel* behelst eene beknopte uiteenzetting der MACLAURIN'sche transformatie met enkele toepassingen.

N°. 22. *Voordrachten van* 20 *Jan.* 1892 *en* 31 *Maart* 1894. Over het afleiden van regelvlakken van den derden en vierden graad uit de transformatie van den cirkel. Een overzicht van den voornaamsten inhoud der eerste voordracht is te vinden in het *Nieuw Archief*, Deel XX, p. 108—111. Het laatste gedeelte van het boekje is met N°. 23 benuttigd bij de voordracht van 31 Maart 1894. Verder blijkt uit dit boekje en uit de teekeningen gemerkt $XXII^A$, $XXII^B$ en $XXII^C$, dat ook nog eenige zeer bijzondere transformaties besproken zijn. Op de *eerste* teekening wordt eene rechte in gelijkzijdige hyperbolen, op de *tweede* eene hyperbool in eene derdegraadskromme met dubbelpunt, op de *derde* een cirkel in vierdegraadskrommen met drievoudig punt omgezet.

N⁰. 23. *Voordracht van* 31 *Maart* 1894. **Algemeene afleiding van derdemachtsregelvlakken.** Deze voordracht is later omgewerkt tot eene vrij uitvoerige verhandeling, te vinden *Nieuw Archief*, Tweede reeks, Deel I, p. 137—162.

D. Overzicht der overige handschriften en teekeningen van A. N. Godefroy.

Na onze uitvoerige bespreking der aanteekenboekjes en bijbehoorende teekeningen, meenen wij omtrent het overblijvende kort te kunnen zijn. Het bestaat uit enkele teekeningen, waaronder die op de ovalen van Descartes, de cycliden en de lemniscaat betrekking hebben, die wij niet aan eene bepaalde voordracht hebben kunnen aansluiten, maar waarvan wij evenwel eene nadere beschrijving achterwege meenen te mogen laten; uit een zeker aantal manuscripten over onderwerpen van elementairen aard, oplossingen van vraagstukken enz., welke wij niet meenen te moeten begrijpen onder de „opstellen over kromme lijnen en gebogen oppervlakken", waarvan in Godefroy's testament sprake is, en voorts uit de volgende stukken, welke wèl daarop betrekking hebben en daarom met een enkel woord behooren te worden vermeld.

1°. De korte verslagen der voordrachten van 5 Nov. en 24 Dec. 1873 en van 28 Januari 1874, waarvan reeds vroeger melding is gemaakt. (Zie A, B en bij C N⁰. 1.)

2°. Een daaraan aansluitend opstel, gedateerd 25 Januarij 1875 en getiteld: „Bepaling der kegelsneden door stelsels snijlijnen en raaklijnen, en vervorming van figuren in het algemeen."

3°. Twee dito met soortgelijken titel, ongedateerd.

4°. Een dito „Vervorming van kromme lijnen door stralenbundels en bepaling der raaklijn" van 2 Febr. 1879.

5°. Een uitvoerig stuk, gedateerd 1884, handelende over de Maclaurin'sche transformatie, de transformatie één op twee, in de voordracht van 26 Febr. 1881 (zie bij C N⁰. 8) besproken en de ontstaanswijzen der derdegraadsvlakken.

6°. Een opstel van vijftig bladzijden met sierlijke teekeningen voorzien, gedateerd 10 Oct. 1890 en getiteld: Transformatie van kegelsneden tot kromme lijnen van hoogere orden

volgens MACLAURIN, en bepaling der raaklijn in eenig getransformeerd punt der kromme.

Deze manuscripten, welke allen in hoofdzaak op de transformatie van kromme lijnen betrekking hebben, zijn in eene *eerste* portefeuille bijeengebracht.

Eene *tweede* portefeuille bevat opstellen over 3^e graadsoppervlakken, waaronder zeer uitvoerige met vele teekeningen voorziene. Zij zijn gedateerd van 1884—1894. In hoofdzaak worden de bij de aanteekenboekjes besprokene denkbeelden hier nader uitgewerkt.

DE PRIJSVRAAG VAN GODEFROY,

DOOR

P. H. SCHOUTE.
(Groningen.)

In verband met de vorige verhandeling van Dr. D. J. KORTEWEG laten we hier onveranderd een in October 1884 opgestelde oplossing van de prijsvraag

„eene kromme lijn, waarvan de kromtestraal bekend is, wordt „vervormd door stralenbundels door drie vaste punten en eene „vaste lijn; men vraagt den kromtestraal van de vervormde „kromme te vinden door constructie"

van GODEFROY volgen; ze sluit zich aan bij mijn in KORTEWEG's studie aangehaald opstel.

1. Daar de in het vraagstuk aangewezene MACLAURIN'sche transformatie een zich tot de constructie van kromme lijnen uitstekend leenend bijzonder geval van de algemeene kwadratische overeenkomst tusschen twee vlakke stelsels Σ en Σ' is, behandelen we het vraagstuk eerst met betrekking tot dit algemeene geval der geheel willekeurig aangenomene kwadratische verwantschap. Wijl in het algemeen met twee elkaar osculeerende krommen van Σ twee elkaar eveneens osculeerende krommen van Σ' overeenstemmen en de bepaling van punten en raaklijnen der kromme van Σ', die met een gegeven kromme van Σ overeenkomt, in de aangehaalde verhandeling geheel is uitgewerkt, kunnen we hierbij echter geheel volstaan met de eenvoudige onderstelling, dat de bedoelde kromme van Σ, waarvan in elk willekeurig punt P de kromtestraal bekend is, door haren kromtecirkel in dit punt is vervangen. Waardoor de oplossing van het tot het geval der algemeene kwadratische verwantschap in betrekking staande vraagstuk zich herleidt tot

de bepaling van den kromtestraal der kromme van Σ', die met een gegeven cirkel van Σ overeenstemt, en wel meer bepaald van den kromtestraal dier kromme in het punt P', dat met een gegeven punt P van den cirkel overeenkomt.

Zijn nu A, B, C de fundamentaalpunten van het vlakke stelsel Σ des gegeven cirkels en A', B', C' de overeenkomstige fundamentaalpunten van het met Σ kwadratisch verwante vlakke stelsel Σ' der vervormde kromme, dan leidt de opmerking, dat met een kegelsnee K door twee der drie punten A, B, C van Σ een kegelsnee K' door de twee overeenkomstige fundamentaalpunten van Σ' overeenkomt, spoedig tot de verlangde oplossing. Want, neemt men voor K de kegelsnee door A en B, die de gegeven cirkel in P osculeert, dan zal K' de kegelsnee door A' en B' zijn, die in het overeenkomstige punt P' drie op elkaar volgende punten met de vervormde kromme gemeen heeft, en de kromtestraal van K' in P' dus de verlangde kromtestraal der vervormde kromme wezen. Wijl het construeeren van punten en raaklijnen der vervormde kromme hier als bekend wordt aangenomen, splitst bovenstaande beschouwing de oplossing van het gegeven vraagstuk in twee deelen. Wil men namelijk den overgang van de kegelsnee K, die door de punten A, B, P gaat en in P een gegeven cirkel tot kromtecirkel heeft, tot de kegelsnee K' mogelijk maken, dan moet men in de eerste plaats van K nog een nieuw punt Q bepalen. Want dan kan men K door de punten A, B, P, Q en de raaklijn p in P bepaald denken, waardoor het overgaan tot K', van den kromtestraal van K in P onafhankelijk gemaakt, zoo eenvoudig mogelijk geworden is. En heeft men daarop van K' als bepalende grootheden de punten A', B', P', Q' en de raaklijn p' in P' bijeengezocht, dan moet in de tweede plaats van deze kegelsnee K' de kromtestraal in het punt P' geconstrueerd worden.

2. Wanneer twee collineaire vlakke stelsels Σ en Σ' in een zelfde vlak een perspectivische ligging hebben met het punt L tot centrum en de lijn l tot as van collineatie, dan komt met een kegelsnee K van Σ, die door L gaat en l in de punten M en N snijdt, een kegelsnee K' van Σ' overeen, die in L de aangenomen kegelsnee aanraakt en door M en N gaat. En ligt het centrum van collineatie L op de collineatieas, dan

zullen K′ en K elkaar in L driepuntig aanraken en verder op l nog een ander punt gemeen hebben [1]).

Deze stelling geeft ons onmiddellijk een oplossing van de beide werkstukken aan de hand, waarin het vraagstuk zich heeft gesplitst.

Eerste gedeelte. „Van een kegelsnee K door A, B en P is de kromtecirkel c in P gegeven; het vierde snijpunt Q van dien cirkel met K te construeeren."

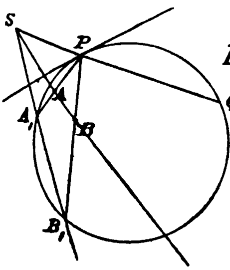


Fig. 1.

Oplossing. Men verbindt A en B (fig. 1) met P en zoekt van de verbindingslijnen AP en BP de tweede snijpunten A_1 en B_1 met den gegeven kromtecirkel c. Bepaalt men daarna het snijpunt S van de lijnen A_1B_1 en AB, dan zal PS den cirkel c in het verlangde punt Q snijden. De verklaring hiervan is onmiddellijk gegeven, wanneer men de kegelsnee K en den cirkel c als perspectivisch collineair verwante krommen beschouwt met P als centrum en PS als as van collineatie.

Tweede gedeelte. „Van een kegelsnee K door A, B, P, Q is de raaklijn p in P gegeven; den kromtestraal van K in P te construeeren [2]).

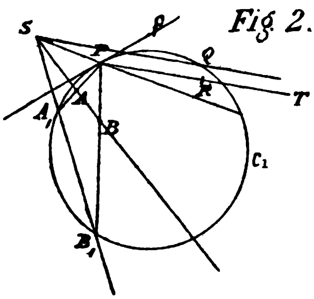


Fig. 2.

Oplossing. Men verbindt A en B met P (fig. 2) en zoekt de snijpunten A_1 en B_1 van de verbindingslijnen AP en BP met den cirkel c_1 door P en Q, die in P de lijn p aanraakt. Is nu S weer het snijpunt van AB met A_1B_1 en PT de lijn uit P evenwijdig aan QS getrokken, dan zal het tweede snijpunt R van PT met K — en dit punt kan met behulp van de stelling van Pascal gevonden worden — een punt zijn van den verlangden kromtecirkel, enz.

---

[1]) Men raadplege *Die Geometrie der Lage* von Th. Reye, 2e Abtheilung, 3ter Vortrag en *Die Fundamentaltheorien der neueren Geometrie u. s. w.* von H. Seeger, Seite 145.

[2]) Ik laat hier de accenten weg.

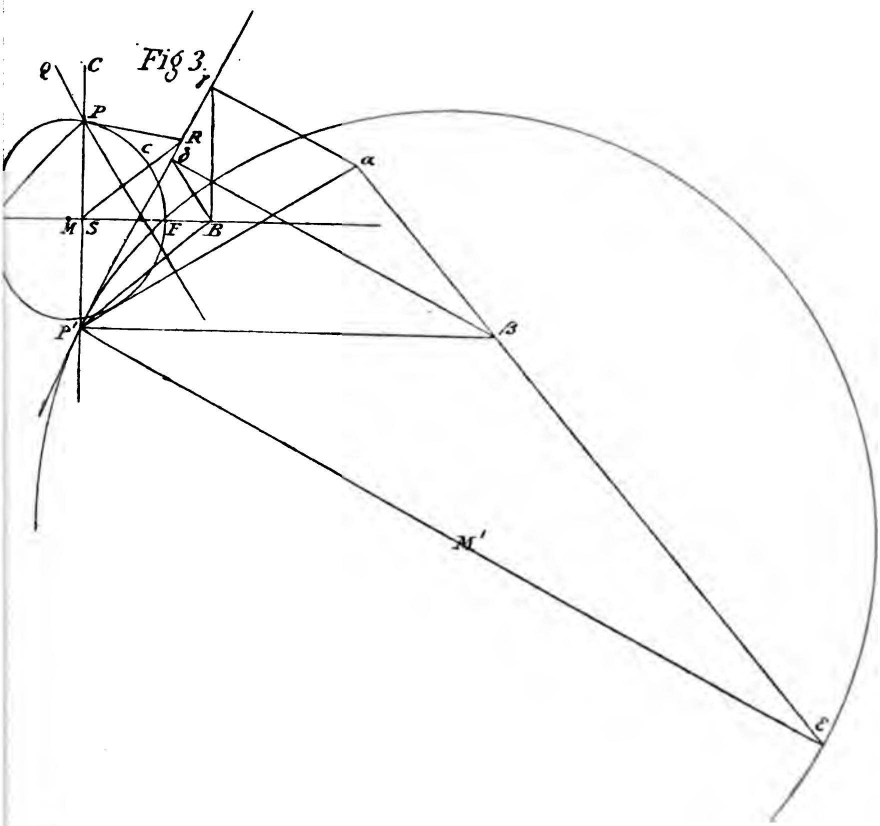
Een tweede oplossing van elk der beide deelen van ons werkstuk vloeit onmiddellijk voort uit de sierlijke constructie van den kromtestraal der kegelsneden, die door P. Serret in zijn *Géométrie de direction* [1]) gegeven is. Daarbij leert het eerste gedeelte ons vinden niet juist het nog onbekende vierde snijpunt Q van K met c, maar het tweede snijpunt van een willekeurige lijn door P met K. De volledige uitwerking dezer constructie mag aan den lezer worden overgelaten.

3. Gaan we thans tot de bijzondere gevallen der algemeene kwadratische overeenkomst en dan wel in de eerste plaats tot de in het vraagstuk bedoelde Maclaurin'sche transformatie over, dan gebruiken wij deze toepassing tot het doen kennen van een constructie voor den kromtestraal der eenvoudigste krommen, die men door middel van de Maclaurin'sche transformatie uit den cirkel afleidt, *cissoïde*, *strophoïde* en *conchoïde.*

Is van de drie „straalpunten" A, B, C (fig. 3) het punt A op den cirkel c, dien men vervormt, B ergens op de door A gaande middellijn van dien cirkel en C in het oneindige in de richting loodrecht op die middellijn gelegen en is de „richtlijn" tevens in het oneindige verdwenen, dan is de vervormde kromme een cissoïde, als B met het diametraal tegenover A gelegen punt F, en een strophoïde, als B met het middelpunt M des cirkels samenvalt. Met het willekeurig gekozen punt P van c komt volgens den aard der transformatie het punt P′ overeen, terwijl de raaklijn in P′ aan de vervormde kromme de verbindingslijn is van het punt P′ met het snijpunt R van de raaklijn in P aan c en de lijn uit S evenwijdig aan AP getrokken [2]). Beschouwen we nu de kegelsnee K, die door A, C en P gaat en in P den cirkel c tot kromtecirkel heeft, dan is het duidelijk, dat we niet behoeven te zoeken naar het vierde snijpunt van de elkaar in P driepuntig aanrakende krommen K en c, want dit vierde punt is A. Maar in verband met de bekende stelling, die zegt dat twee gemeenschappelijke koorden van een kegelsnee en een cirkel ten opzichte van de assen van die kegelsnee antiparallel zijn met elkaar en dit zelfde klaarblijkelijk van de asymptoten der kegelsnee beweerd kan

[1]) t. a. p., blz. 479.
[2]) Men vergelijke mijn aangehaalde verhandeling.

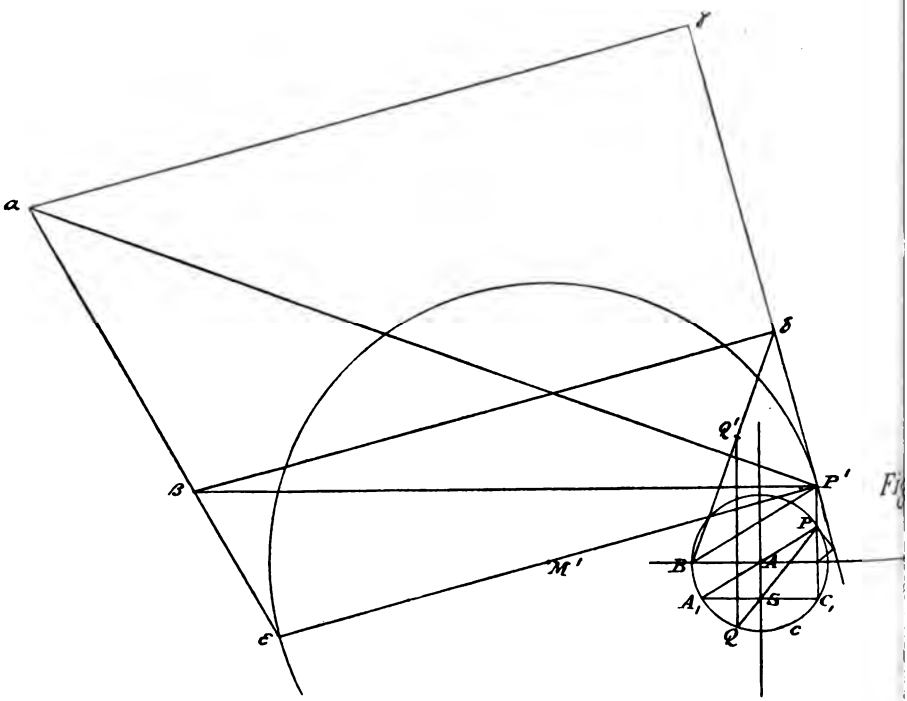
worden, moet het oneindig ver gelegen punt Q, waarvoor de hoeken APQ en CPR aan elkaar gelijk zijn, het tweede oneindig ver verwijderde punt van de hyperbool K zijn. En daar de punten van de richtlijn der transformatie met zich zelf overeenstemmen, is dit ook met het punt Q het geval, zoodat de kegelsnee K′ door de punten B, C, P′, Q en de raaklijn p' in



P′ bepaald wordt. Van deze kegelsnee K′ is nu de bepaling van den kromtestraal in P′ geheel naar de door Serret gevondene constructie uitgevoerd.

Nemen we verder aan, dat het straalpunt A het middelpunt is van den te vervormen cirkel (fig. 4), dat B ergens op die kromme ligt en dat C in de richting loodrecht op AB op de oneindig ver gelegen richtlijn ligt, dan is de vervormde kromme een conchoïde. Beschouwen we nu de kegelsnee K, die door

A en C gaat en den gegeven cirkel c in P driepuntig aanraakt, als perspectivisch collineair verwant met c, dan moet P het collineatiecentrum en tevens een punt der as van collineatie zijn; daarbij zijn dan A_1 en C_1 de met A en C overeenkomende punten van c, is dus het snijpunt S van A_1C_1 met AC een tweede punt der collineatieas en Q het vierde punt, dat



K en c gemeen hebben. Dus wordt de kegelsnee K′ bepaald door de punten B, C, P′, Q′ en de raaklijn p' in P′ en de kromtestraal dier kromme in P′ als boven gevonden.

4. De constructies van den kromtestraal der cissoïde, strophoïde en conchoïde, die we juist ontwikkeld hebben, kunnen nog niet op eenvoudigheid bogen. Waarschijnlijk zijn er dan ook uit cinematische beschouwingen of uit analytische ontwikkelingen wel eenvoudiger constructies af te leiden. Hier echter mag het opsporen dier meer eenvoudige constructies als buiten het kader van de vraag beschouwd en daarom achterwege ge-

laten worden. We bespreken dus hier alleen nog een ander bijzonder geval der algemeene kwadratische transformatie, dat zich door de groote eenvoudigheid der kromtestraalconstructie kenmerkt, de overeenkomst door wederkeerige voerstralen.

In deze algemeen bekende overeenkomst gaat de kromtecirkel eener kromme in een punt P in den kromtecirkel der overeenkomstige kromme in het overeenkomstige punt P′ over. Hierin is een middel vervat ter bepaling van den kromtestraal

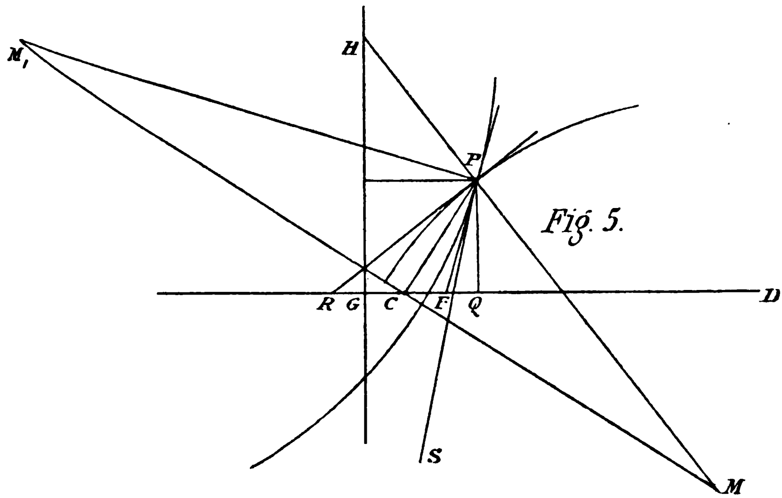


Fig. 5.

van elke voetpuntskromme van een kegelsnee, wijl deze voetpuntskromme in een overeenkomst door wederkeerige voerstralen met een kegelsnee overeenstemt, wanneer men het in het eindige gelegen dubbelpunt der voetpuntskromme tot centrum van de voerstralen aanneemt [1]. We schetsen dus ten slotte met een enkelen trek, hoe langs dezen weg de kromtestraal bepaald kan worden van de cissoïde in een gegeven punt P der kromme in de onderstelling, dat deze kromme behalve door dit punt, door haar keerpunt C (fig. 5) met de keerraaklijn CD bepaald is.

Neemt men C tot centrum en $\overline{CP}^2$ tot macht der overeenkomst door wederkeerige voerstralen aan, dan komt met de gegeven cissoïde de parabool overeen, die C tot top, CD tot as en P tot een harer punten heeft. Van deze parabool is de

---

[1]) *Traité de géométrie analytique* de H. Picquet, tome I, pag. 575.

raaklijn in P bepaald door P in Q op CD te projecteeren, RC = CQ te nemen en R met P te verbinden. Daarna is het brandpunt F der parabool bepaald als het snijpunt van de middelloodlijn van het segment PR met de as en vervolgens de richtlijn GH. Is nu H het punt, waar de normaal der parabool de richtlijn snijdt en PM = 2HP genomen, dan is M het krommingsmiddelpunt der parabool in P [1]). En wanneer verder $\angle$ CPS = $\angle$ RPC gemaakt en in P een loodlijn op PS opgericht wordt, dan is het snijpunt M_1 van die loodlijn PM_1 met MC het verlangde krommingsmiddelpunt. Aan den lezer te onderzoeken, of deze constructie, ontdaan van alles wat tot de uitlegging dienst deed,. korter of langer is dan die van fig. 3, waarbij dan natuurlijk het verschil, dat er in de beide gevallen met betrekking tot de wijze van bepaling der cissoïde voorkomt, in rekening moet worden gebracht.

Groningen, 6 October, 1884.

---

[1]) *Jacob Steiner's gesammelte Werke*", zweiter Band, Seite 342.

SUR LA SOLUTION LA PLUS GÉNÉRALE DE DEUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR

W. KAPTEYN.
(Utrecht.)

Soit λ une fonction des trois variables indépendantes x, y et z; nous nous proposons de déterminer la solution la plus générale des deux équations différentielles

$$2\lambda\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+2a\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}+a^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)+2\lambda^3\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+2b\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}+b^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)=$$

$$=3\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+a\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2+\lambda^2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}+b\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2,$$

$$\lambda\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}+b\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}+ab\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+a\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}+b\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right),$$

où a et b représentent des constantes.

En posant

$$\mathrm{H}(\lambda)=\frac{\partial\lambda}{\partial x}+a\frac{\partial\lambda}{\partial z}, \qquad \mathrm{G}(\lambda)=\frac{\partial\lambda}{\partial y}+b\frac{\partial\lambda}{\partial z}$$

les deux équations différentielles prendront la forme

$$2\lambda\mathrm{HH}(\lambda)+2\lambda^3\mathrm{GG}(\lambda)=3\mathrm{H}^2(\lambda)+\lambda^2\mathrm{G}^2(\lambda),$$

$$\lambda\mathrm{GH}(\lambda)=\lambda\mathrm{HG}(\lambda)=\mathrm{G}(\lambda)\mathrm{H}(\lambda),$$

ou

$$(1)\ \ldots\ 2\mathrm{H}\frac{\mathrm{H}(\lambda)}{\lambda}-\frac{\mathrm{H}^2(\lambda)}{\lambda^2}+\lambda^2\left\{2\mathrm{G}\frac{\mathrm{G}(\lambda)}{\lambda}+\frac{\mathrm{G}^2(\lambda)}{\lambda^2}\right\}=0,$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{G}\frac{\mathrm{H}(\lambda)}{\lambda}=\mathrm{H}\frac{\mathrm{G}(\lambda)}{\lambda}=0.$$

De la dernière équation on déduit

$$\frac{G(\lambda)}{\lambda} = f_1(z - ax, y), \quad \frac{H(\lambda)}{\lambda} = f_2(z - by, x),$$

où f_1 et f_2 représentent des fonctions arbitraires.

En introduisant ces valeurs dans la première équation on aura

$$\lambda = \frac{T(z - ax, y)}{N(z - by, x)},$$

T et N étant des fonctions quelconques, que nous allons déterminer à présent.

Remarquons, pour y arriver, qu'on aura

$$H(T) = 0 \quad , \qquad G(N) = 0$$

et par conséquent

$$H(\lambda) = -\lambda \frac{H(N)}{N}, \quad G(\lambda) = \lambda \frac{G(T)}{T},$$

$$2H\frac{H(\lambda)}{\lambda} - \frac{H^2(\lambda)}{\lambda^2} = -\frac{2NHH(N) - H^2(N)}{N^2},$$

$$2G\frac{G(\lambda)}{\lambda} + \frac{G^2(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{2TGG(T) - G^2(T)}{T^2}.$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (1) on obtient

(3) . . . . . $2TGG(T) - G^2(T) = 2NHH(N) - H^2(N)$,

dont le premier membre est une fonction de $z - ax = u$ et de y, tandis que le second membre est une fonction de $z - by = v$ et de x. Opérons maintenant sur cette équation d'abord avec l'opérateur G, ensuite avec H; alors on trouve respectivement

(4) . . . . $GGG(T) = 0$,

(5) . . . . $HHH(N) = 0$,

dont l'intégration ne présente aucune difficulté.

En effet, en écrivant l'équation (4) sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + b\frac{\partial}{\partial z}\right) GG(T) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + b\frac{\partial}{\partial u}\right) GG(T) = 0$$

on voit aisément que l'intégrale générale prend la forme

$$GG(T) = 2b^2\phi(z - ax - by) = 2b^2\phi,$$

ϕ étant une fonction arbitraire. Cette équation étant équivalente à

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + b\,\frac{\partial}{\partial u}\right) G(T) = 2b^2\phi$$

donne ensuite

$$G(T) = 2bu\phi + 2b\psi,$$

où ψ représente une nouvelle fonction de $z - ax - by$.

En traitant de la même manière cette dernière équation on obtient

$$T = u^2\phi + 2u\psi + \chi,$$

χ étant encore une fonction arbitraire de $z - ax - by$.

Il est bien évident que la solution la plus générale de l'équation différentielle (5) se réduira à

$$N = v^2\phi_1 + 2v\psi_1 + \chi_1$$

ϕ_1 ψ_1 et χ_1 représentant encore trois fonctions arbitraires de $z - ax - by$.

L'introduction des valeurs obtenues pour T et N dans l'équation (3) fait voir que les six fonctions arbitraires doivent satisfaire à la seule relation

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad b^2(\psi^2 - \phi\chi) = a^2(\psi_1{}^2 - \phi_1\chi_1).$$

La solution la plus générale des deux équations différentielles s'écrit donc

$$\lambda = \frac{u^2\phi + 2u\psi + \chi}{v^2\phi_1 + 2v\psi_1 + \chi_1},$$

où les fonctions arbitraires de $z - ax - by$ sont liées par la relation (6).

EEN VRAAGSTUK DER DYNAMICA

DOOR

A. J. SWART.
(Zutphen.)

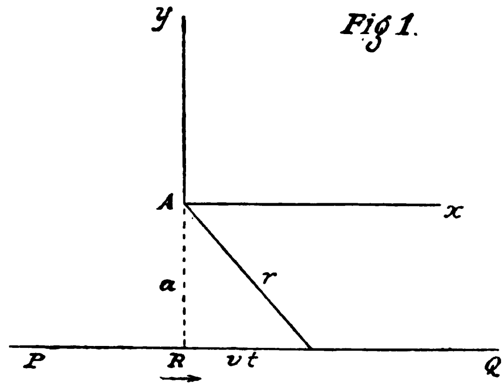
Een stoffelijk punt (massa M) kan om zijn evenwichtsstand A kleine elastische trillingen uitvoeren $\left(\text{trillingstijd } \frac{2\pi}{n}\right)$. Langs eene rechte lijn PQ beweegt zich met standvastige snelheid v, komende uit het oneindige, een ander punt, dat op M eene kracht uitoefent, welke eene functie is van den afstand.

De afstand van A tot PQ is a. De uitwijkingen van M uit den evenwichtsstand zijn klein ten opzichte van a.

Welke is de trillende beweging van M, als het aantrekkende punt in het oneindige verdwenen is?

Voor welke waarde van v zal de trillingsenergie, welke M ten slotte verkrijgt, eene maximale (of minimale) waarde hebben?

I. Het punt M is oorspronkelijk in rust.



't Is a priori duidelijk, dat voor eene bepaalde waarde van

v de trillingsenergie maximaal moet worden, want zoowel voor $v=0$ als voor $v=\infty$ is zij nul.

Wij nemen A als oorsprong en de x-as evenwijdig aan PQ. Als $t=0$ is, bevindt zich het aantrekkende punt in R.

De bewegingsvergelijkingen luiden

$$M\ddot{x}+Kx=MX \quad \text{en} \quad M\ddot{y}+Ky=MY\ ,$$

waarin

$$X=\frac{vt}{r}F(r)\quad,\quad Y=-\frac{a}{r}F(r)\quad,\quad r=(a^2+v^2t^2)^{1/2}.$$

Wij stellen verder $\dfrac{K}{M}=n^2$.

De algemeene oplossing van deze vergelijkingen luidt

$$(1)\ \ldots\ \begin{cases} x=A\sin(nt+\alpha)+\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}X_\tau\sin n(t-\tau)d\tau, \\ y=B\sin(nt+\beta)+\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}Y_\tau\sin n(t-\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

Daar het punt oorspronkelijk in rust is, zoo is $A=B=0$. Derhalve is

$$x=\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{t}X_\tau\sin n(t-\tau)d\tau \quad \text{en} \quad y=\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{t}Y_\tau\sin n(t-\tau)d\tau.$$

Voor groote waarden van t kunnen we de elementen voor $t=\tau$ en $t=-\tau$ samenvoegen, waarbij $X_{-\tau}=-X_\tau$ en $Y_{-\tau}=Y_\tau$ is.

Wij vinden

$$x=-\frac{2}{n}\cos nt\int_0^\infty X\sin ntdt \quad \text{en} \quad y=\frac{2}{n}\sin nt\int_0^\infty Y\cos ntdt.$$

Tusschen deze beide integralen bestaat de volgende betrekking

$$\int_0^\infty X\sin ntdt=-\frac{v}{a}\int_0^\infty Y\,t\sin ntdt=$$

$$=\frac{v}{na}\Big[Y\,t\cos nt\Big]_0^\infty-\frac{v}{na}\int_0^\infty\left(Y+t\frac{\partial Y}{\partial t}\right)\cos ntdt.$$

De geïntegreerde term is nul en daar $t\frac{\partial Y}{\partial t} = v\frac{\partial Y}{\partial v}$ is, wordt

$$\int_0^\infty X \sin ntdt = -\frac{v}{na}\int_0^\infty Y \cos ntdt - \frac{v^2}{na}\frac{\partial}{\partial v}\int_0^\infty Y \cos ntdt.$$

Wij stellen

$$\int_0^\infty Y \cos ntdt = aU.$$

De baan, welke ten slotte door het deeltje wordt gevolgd, wordt dus bepaald door

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{2v}{n^2}\left(U + v\frac{\partial U}{\partial v}\right)\cos nt \quad \text{en} \quad y = \frac{2a}{n} U \sin nt.$$

Noemen wij de energie, welke het deeltje verkrijgt, E, dan is

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad E = \frac{2M}{n^2}\left\{v^2\left(U + v\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 + n^2a^2U^2\right\}.$$

De waarde van v, waarvoor E, bij gegeven waarden van a en n, hare maximale waarde bereikt, wordt bepaald door de vergelijking

$$(4) \quad v\left(U + v\frac{\partial U}{\partial v}\right)\left(U + 3v\frac{\partial U}{\partial v}\right) + v^3\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\left(U + v\frac{\partial U}{\partial v}\right) + n^2a^2U\frac{\partial U}{\partial v} = 0$$

De door ons ingevoerde functie U voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad U + v\frac{\partial U}{\partial v} + n\frac{\partial U}{\partial n} = 0,$$

waaruit volgt

$$vU = f(nU).$$

Overigens kunnen wij omtrent deze functie geene nadere bijzonderheden mededeelen, tenzij de krachtenwet gegeven is.

Stellen wij $\mathrm{F}(r)=\dfrac{\alpha}{r^{m-1}}$,

dan is $$\mathrm{U}=-\alpha\int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^m}\,dt,$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}=m\alpha\int_0^\infty \frac{a\cos nt}{r^{m+2}}\,dt,$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v}=m\alpha\int_0^\infty \frac{vt^2\cos nt}{r^{m+2}}\,dt,$$

waaruit volgt

(6) . . . . $$a\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}+v\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v}+m\mathrm{U}=0.$$

In verband met (5) leiden wij hieruit af

(7) . . . . $$a\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}-n\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}+(m-1)\,\mathrm{U}=0.$$

Verder is

$$\mathrm{U}=-\alpha\int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^m}\,dt=\left[-\frac{\alpha}{n}\,\frac{\sin nt}{r^m}\right]_0^\infty-\frac{\alpha m v^2}{n}\int_0^\infty \frac{t\sin nt}{r^{m+2}}\,dt.$$

De geïntegreerde term is nul; dus is

$$\mathrm{U}=\left[\frac{\alpha m v^2}{n^2}\,\frac{t\cos nt}{r^{m+2}}\right]_0^\infty-\frac{\alpha m v^2}{n^2}\int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^{m+2}}\,dt+\frac{\alpha m(m+2)v^4}{n^2}\int_0^\infty \frac{t^2\cos nt}{r^{m+4}}\,dt.$$

De geïntegreerde term is nul en derhalve

$$\mathrm{U}=\frac{\alpha m(m+1)v^2}{n^2}\int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^{m+2}}\,dt-\frac{\alpha m(m+2)a^2v^2}{n^2}\int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^{m+4}}\,dt,$$

of, daar

$$\alpha\int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^{m+2}}\,dt=\frac{1}{ma}\;\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}$$

en

$$\alpha\int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^{m+4}}\,dt=-\frac{1}{m(m+2)\,a}\;\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a}\;\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}\right)=$$

$$=\frac{1}{m(m+2)a^3}\;\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}-\frac{1}{m(m+2)a^2}\;\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial a^2}$$

is, zoo krijgen wij de volgende vergelijking

$$(8) \ldots\ldots\ldots \quad a\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + m\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{n^2}{v^2}aU = 0.$$

Wij differentieeren (6) naar a en naar v en vinden

$$(m+1)\frac{\partial U}{\partial a} + a\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + v\frac{\partial^2 U}{\partial a \partial v} = 0,$$

$$(m+1)\frac{\partial U}{\partial v} + v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + a\frac{\partial^2 U}{\partial a \partial v} = 0.$$

Door eliminatie van $\frac{\partial U}{\partial a}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}$ en $\frac{\partial^2 U}{\partial a \partial v}$ uit (6), (8) en deze vergelijkingen vinden we de vergelijking

$$(9) \ldots \quad \left(m - \frac{n^2a^2}{v^2}\right)U + (m+2)v\frac{\partial U}{\partial v} + v^2\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} = 0.$$

Lossen wij hieruit $\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}$ op en substitueeren we deze waarde in (4), dan wordt de voorwaarde voor maximum-energie

$$(10) \ldots \quad U^2 + 2vU\frac{\partial U}{\partial v} = (m-1)\frac{v^2}{n^2a^2}\left(U + v\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2.$$

Wanneer het eerste lid nog den term $v^2\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2$ bevatte, dan zouden wij door $\left(U + v\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2$ kunnen deelen. Nu is het te verwachten, dat de beide deelen, waaruit de energie bestaat (zie (3)), nagenoeg voor dezelfde waarde van v hun maximum zullen bereiken, waaruit volgt, dat voor deze waarde van v de term $v^2\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2$ klein zal zijn ten opzichte van U^2.

Als benaderde waarde van v, waarvoor E hare maximale waarde bereikt, vinden wij dus:

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad v_{\text{max.}} = \frac{na}{\sqrt{(m-1)}}.$$

Het zal in de onderzochte gevallen blijken, dat deze benadering eene zeer goede is.

Stellen wij $v_{\max.} = \mathrm{K}na$, dan is

$$\mathrm{U} = -\alpha\int_0^\infty \frac{\cos ntdt}{(a^2+\mathrm{K}^2n^2a^2t^2)^{\frac{m}{2}}} = -\frac{\alpha}{a^m n}\int_0^\infty \frac{\cos zdz}{(1+\mathrm{K}^2z^2)^{\frac{m}{2}}} = -\frac{\alpha}{a^m n}f_1(m),$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v} = m\alpha\int_0^\infty \frac{\mathrm{K}nat^2\cos ntdt}{(a^2+\mathrm{K}^2n^2a^2t^2)^{\frac{m+2}{2}}} = \frac{m\alpha\mathrm{K}}{a^{m+1}n^2}\int_0^\infty \frac{z^2\cos zdz}{(1+\mathrm{K}^2z^2)^{\frac{m+2}{2}}} = \frac{m\alpha\mathrm{K}}{a^{m+1}n^2}f_2(m).$$

Substitueeren wij deze waarden in (3), dan vinden wij

$$\mathrm{E}_{\max.} = \frac{f_3(m)}{n^2a^{2m-2}}.$$

Derhalve: Is de kracht welke op het deeltje werkt $\frac{\alpha}{r^{m-1}}$, dan is de maximale energie, welke het deeltje kan verkrijgen, omgekeerd evenredig met n^2 en met a^{2m-2}.

Door substitutie van (11) in (3) vinden wij als benaderingswaarde voor de maximale energie

$$(12)\quad \mathrm{E}_{\max.} = \frac{2\mathrm{M}a^2}{m-1}\left(m\mathrm{U}^2 + 2\,\frac{na}{\sqrt{(m-1)}}\,\mathrm{U}\,\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial v} + \frac{n^2a^2}{m-1}\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial v}\right)^2\right).$$

<u>$m - 1 = 1.$</u>

Als men voor eene waarde van m de waarde van U heeft berekend, kent men ze ook voor $m+2$, $m+4$ enz., want

$$(13)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathrm{U}_{m+2} = -\frac{1}{ma}\,\frac{\partial\mathrm{U}_m}{\partial a}.$$

Wij kunnen voor $m = 2$ de integratie uitvoeren.

In plaats van 0 tot ∞ integreeren we in het complexe vlak langs AGFEDCB. De functie is in het ingesloten gebied synektisch.

$$\int_0^\infty \frac{\cos nt}{a^2+v^2t^2}dt = \text{reëel deel van} \int_0^\infty \frac{e^{inz}}{a^2+v^2z^2}dz.$$

Integreerend langs AGFEDCB is alleen de integratie om P reëel.

Wij stellen $z = i\frac{a}{v} + r(\cos\phi + i\sin\phi)$, dan is

$$U_2 = -\alpha \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{e^{-\frac{na}{v}} d\phi}{2av} = -\frac{\pi\alpha}{2av} e^{-\frac{na}{v}}.$$

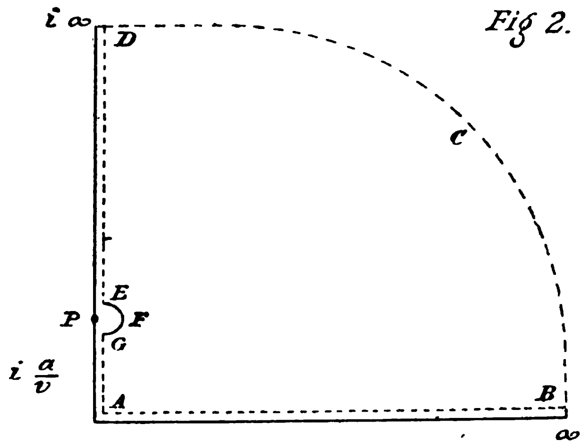


Fig 2.

Voor de vergelijkingen van de baan van het deeltje vinden wij

$$x = -\frac{\pi\alpha}{nv} . e^{-\frac{na}{v}} \cos nt \text{ en } y = -\frac{\pi\alpha}{nv} e^{-\frac{na}{v}} \sin nt.$$

Voor elke waarde van v ontstaat dus in dit geval eene *cirkelbeweging.*

De energie der trillende beweging bedraagt

$$E = \frac{\pi^2\alpha^2 M}{v^2} e^{-\frac{2na}{v}}.$$

Hare maximale waarde

$$E_{max.} = \frac{\pi^2\alpha^2 M}{e^2 n^2 a^2} = 1.335 \frac{\alpha^2 M}{n^2 a^2}$$

wordt bereikt voor $v = na$ (in overeenstemming met formule (11)).

$m - 1 = 3.$

Volgens (13) leiden wij U_4 uit U_2 af.

$$U_4 = -\frac{\pi\alpha}{4} \frac{na + v}{a^3 v^2} e^{-\frac{na}{v}}.$$

De vergelijkingen der baan zijn

$$x = -\frac{\pi\alpha}{2av^2} e^{-\frac{na}{v}} \cos nt,$$

$$y = -\frac{\pi\alpha(na+v)}{2na^2v^2} e^{-\frac{na}{v}} \sin nt.$$

Voor de energie vinden wij

$$E = \frac{\pi^2\alpha^2 M}{8a^4v^4}(2n^2a^2 + 2nav + v^2)e^{-\frac{2na}{v}}.$$

De voorwaarde voor maximumenergie luidt

$$v^3 + 2nav^2 + 2n^2a^2v - 2n^3a^3 = 0,$$

waaruit volgt

$$v_{\text{max.}} = 0.574743\, na,$$

terwijl uit de benaderingsformule (11) volgt

$$v_{\text{max.}} = \frac{na}{\sqrt{3}} = 0.577350\, na.$$

Voor de maximale energie vinden wij

$$E_{\text{max.}} = 1.2122\, \frac{\alpha^2 M}{n^2a^6}.$$

Voor kleine waarden van v zijn de amplitudines in de beide coördinatenrichtingen, A_x en A_y, nagenoeg gelijk, maar bij 't grooter worden van v groeit A_y sterker aan dan A_x.

Voor $v_{\text{max.}}$ hebben wij

$$A_y : A_x = 1.575.$$

Voor groote waarden van v heeft de trillende beweging bijna uitsluitend in de y-richting plaats.

$m - 1 = 5.$

$$U_6 = -\frac{\pi\alpha}{16} \frac{3v^2 + 3nav + n^2a^2}{a^5v^3} e^{-\frac{na}{v}}.$$

De vergelijking van de baan is

$$x = -\frac{\pi\alpha}{8} \frac{na+v}{a^3v^3} e^{-\frac{na}{v}} \cos nt,$$

$$y = -\frac{\pi\alpha}{8} \frac{3v^2 + 3nav + n^2a^2}{na^4v^3} e^{-\frac{na}{v}} \sin nt.$$

De waarde der trillingsenergie is

$$E = \frac{\pi^2 \alpha^2 M}{128 a^8 v^6} (9v^4 + 18nav^3 + 16n^2a^2v^2 + 8n^3a^3v + 2n^4a^4)\, e^{-2\frac{na}{v}}.$$

De voorwaarde voor maximumenergie luidt

$$9v^5 + 18nav^4 + 14n^2a^2v^3 + 4n^3a^3v^2 - 2n^4a^4v - 2n^5a^5 = 0,$$

waaruit volgt

$$v_{\max} = 0.445077\, na,$$

terwijl de benaderingsformule (11) geeft

$$v_{\max.} = 0.447213\, na.$$

Voor de maximale energie wordt gevonden

$$E_{\max.} = 1.085 \frac{\alpha^2 M}{n^2 a^{10}}.$$

Voor kleine waarden van v zijn A_x en A_y gelijk, maar de verhouding $A_y : A_x$ neemt toe, als v grooter wordt.

Voor $v_{\max.}$ vinden wij:

$$A_y : A_x = 2.003.$$

Bij groote waarden van v is de beweging nagenoeg in de y-richting.

$m - 1 = 2.$

Wij gaan uit van de integraal

$$U_1 = -\alpha \int_0^\infty \frac{\cos ntdt}{\sqrt{(a^2 + v^2t^2)}} = \text{reëel deel van } -\alpha \int_0^\infty \frac{e^{inz}dz}{\sqrt{(a^2 + v^2z^2)}}.$$

Wij integreeren langs AGFEDCB. Integraal AG is zuiver imaginair, integraal GFE en DCB zijn nul, zoodat integraal ED als reëel deel overblijft.

Wij stellen

$$z = i\frac{a}{v}\sigma \quad \text{en} \quad p = \frac{na}{v};$$

dan is

$$U_1 = -\frac{\alpha}{v} \int_1^\infty \frac{e^{-p\sigma}d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 - 1)}}.$$

Hieruit volgt

$$U_3 = -\frac{n^2 a}{v^3}\int_1^\infty e^{-p\sigma}\sqrt{(\sigma^2-1)}\,d\sigma.$$

Wij noemen

$$\int_1^\infty e^{-p\sigma}\sqrt{(\sigma^2-1)}\,d\sigma = \mathrm{P},$$

$$\int_1^\infty e^{-p\sigma}\sqrt{(\sigma^2-1)}\,\sigma d\sigma = \mathrm{Q},$$

$$\int_1^\infty e^{-p\sigma}\sqrt{(\sigma^2-1)}\,\sigma^2 d\sigma = \mathrm{R};$$

dan is

$$\mathrm{Q} = \tfrac{1}{3}p(\mathrm{R}-\mathrm{P}),$$

$$U_3 = -\frac{n^2 a}{v^3}\mathrm{P}\ ,\quad \frac{\partial U_3}{\partial v} = \frac{n^2 a}{v^5}(3v\mathrm{P} - na\mathrm{Q}).$$

Daar formule (11) in de behandelde gevallen gebleken is eene zeer goede benadering te zijn, zoo ligt het voor de hand te onderstellen, dat ook in dit geval deze benadering goed zal zijn.

Wij stellen $v^2_{\text{max.}} = \frac{n^2 a^2}{2}(1-\delta^2)$ en noemen de bijbehoorende waarden van P, Q, R hier P_1, Q_1, R_1; dan volgt uit (10)

$$v\frac{\partial U}{\partial v} = \delta\left(U + v\frac{\partial U}{\partial v}\right)$$

of

$$\delta = \frac{3v\mathrm{P}_1 - na\mathrm{Q}_1}{2v\mathrm{P}_1 - na\mathrm{Q}_1} = \frac{3\mathrm{P}_1 - p_1\mathrm{Q}_1}{2\mathrm{P}_1 - p_1\mathrm{Q}_1},\ \text{waarin } p_1{}^2 = \frac{2}{1-\delta^2} = 2(1+\delta^2)$$

is. Daar δ^2 klein is, mogen wij schrijven

$$\mathrm{P}_1 = \int_1^\infty e^{-p_1\sigma}\sqrt{(\sigma^2-1)}\,d\sigma = \int_1^\infty e^{-\sigma\sqrt{2}-\frac{\delta^2}{\sqrt{2}}\sigma}\sqrt{(\sigma^2-1)}\,d\sigma =$$

$$= \int_1^\infty e^{-\sigma\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma^2-1)}\,d\sigma - \frac{\delta^2}{\sqrt{2}}\int_1^\infty e^{-\sigma\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma^2-1)}\,\sigma d\sigma =$$

$$= \mathrm{P}(\sqrt{2}) - \frac{\delta^2}{\sqrt{2}}\mathrm{Q}(\sqrt{2}).$$

Evenzoo

$$Q_1 = Q(\sqrt{2}) - \frac{\delta^2}{\sqrt{2}} R(\sqrt{2}).$$

Substitueerende vinden wij

$$\delta = \frac{(11 + 4\delta^2)\,P(\sqrt{2}) - (2 + \delta^2)\,R(\sqrt{2})}{(8 + 3\delta^2)\,P(\sqrt{2}) - 2R(\sqrt{2})}.$$

Door mechanische kwadratuur wordt gevonden

$$P(\sqrt{2}) = 0.22215 \quad , \quad R(\sqrt{2}) = 1.24728\,,$$

waaruit volgt bij eerste benadering

$$\delta = 0.0710$$

en meer nauwkeurig

$$\delta = 0.0739.$$

Voor $v_{\text{max.}}$ verkrijgen wij

$$v_{\text{max.}} = 0.705\,na\,,$$

terwijl de benaderingsformule (11) geeft

$$v_{\text{max.}} = 0.707\,na.$$

De waarde der maximale energie is

$$E_{\text{max.}} = 1.2464\,\frac{\alpha^2 M}{n^2 a^4}.$$

II. Het punt M is oorspronkelijk niet in rust.

De oplossing der bewegingsvergelijkingen geeft nu

$$x = A \sin(nt + \alpha) + \frac{2v}{n^2}\left(U + v\frac{\partial U}{\partial v}\right)\cos nt\,,$$

$$y = B \sin(nt + \beta) + \frac{2a}{n}\, U \sin nt.$$

Voor de energie vindt men

$$E = \tfrac{1}{2} M n^2 (A^2 + B^2) + 2M\left\{v\left(U + v\frac{\partial U}{\partial v}\right) A \sin\alpha + na\,UB\cos\beta\right\} +$$

$$+ \frac{2M}{n^2}\left\{v^2\left(U + v\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 + n^2a^2U^2\right\}.$$

Is $\alpha = 0$ of $= \pi$ en $\beta = \frac{1}{2}\pi$ of $= \frac{3}{2}\pi$, dan is de totale energie gelijk aan de som der energiën van beide trillingen en kunnen wij de volledige oplossing van het vraagstuk gemakkelijk uit bovenstaande afleiden.

$m - 1 = 1.$

$$x = A \sin (nt + \alpha) - \frac{\pi\alpha}{nv} e^{-\frac{na}{v}} \cos nt,$$

$$y = B \sin (nt + \beta) - \frac{\pi\alpha}{nv} e^{-\frac{na}{v}} \sin nt,$$

$$E = \frac{M\pi^2\alpha^2}{v^2} e^{-\frac{2na}{v}} - \frac{M\pi\alpha n}{v} (A \sin \alpha + B \cos \beta) e^{-\frac{na}{v}} + \frac{1}{2}Mn^2(A^2+B^2).$$

Is $A \sin \alpha + B \cos \beta$ gelijk nul, dan is de totale energie gelijk aan de som der energiën van beide trillingen.

De waarde van $A \sin \alpha + B \cos \beta$ beslist over het voorkomen van een of meer maxima of minima.

De maximum- (of minimum-) voorwaarde luidt

$$(v - na) \{nv(A \sin \alpha + B \cos \beta) - 2\alpha\pi e^{-\frac{na}{v}}\} = 0.$$

Er is dan een maximum of minimum voor

(A) . . . . $v = na$

of voor

(B) . . . . $A \sin \alpha + B \cos \beta = \frac{2\alpha\pi}{nv} e^{-\frac{na}{v}}.$

De laatste vergelijking geeft twee waarden voor v, de eene kleiner dan na, de andere grooter dan na, mits $A \sin \alpha + B \cos \beta$ positief is en kleiner dan de grootste waarde, welke het tweede lid kan aannemen, d. i. $\frac{2\alpha\pi}{n^2ae}$.

Is $v = na$, dan bedraagt de maximum- (of minimum-) waarde der energie

$$E_m = \frac{1}{2} Mn^2(A^2 + B^2) - \frac{M\alpha\pi}{ae} (A \sin \alpha + B \cos \beta) + \frac{M\alpha^2\pi^2}{n^2a^2e^2}$$

en voor de waarden van v volgende uit vergelijking B is

$$E_m = \frac{1}{2} Mn^2(A^2 + B^2) - \frac{1}{4} Mn^2(A \sin \alpha + B \cos \beta)^2.$$

Het deeltje kan nu in de volgende gevallen tot rust komen:

1°. als $v = na$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = 0$, $A = B = \dfrac{\alpha\pi}{n^2ae}$ is;

2°. als $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = 0$, $A = B$ is voor de beide waarden van v, die voldoen aan

$$A = \frac{\alpha\pi}{nv} e^{-\frac{na}{v}}.$$

Wij kunnen nu de volgende gevallen onderscheiden:

1°. $A \sin\alpha + B\cos\beta$ negatief, maximumwaarde voor $v = na$.

2°. $A \sin\alpha + B\cos\beta$ positief $< \dfrac{\alpha\pi}{n^2ae}$, minimum — maximum (voor $v = na$) — minimum.

De maximumwaarde is grooter dan de oorspronkelijke waarde.

3°. $A \sin\alpha + B\cos\beta > \dfrac{\alpha\pi}{n^2ae}$ en $< \dfrac{2\alpha\pi}{n^2ae}$, minimum — maximum (voor $v = na$) — minimum.

De maximumwaarde is kleiner dan de oorspronkelijke waarde.

4°. $A \sin\alpha + B\cos\beta > \dfrac{2\alpha\pi}{n^2ae}$, minimumwaarde voor $v = na$.

$m - 1 = 3.$

$$E = \tfrac{1}{2} Mn^2(A^2 + B^2) - \frac{M\alpha\pi n}{2a^2v^2}(na\, A\sin\alpha + (v + na) B\cos\beta)e^{-\frac{na}{v}} +$$
$$+ \frac{M\pi^2\alpha^2}{8} \frac{v^2 + 2nav + 2n^2a^2}{v^4a^4} e^{-\frac{2na}{v}}.$$

De maximum- of minimumvoorwaarde luidt

$$2n^2a^3v^2(2v - na) A\sin\alpha + 2na^2v^2(v^2 + nav - n^2a^2) B\cos\beta -$$
$$- \pi\alpha(v^3 + 2nav^2 + 2n^2a^2v - 2n^3a^3) e^{-\frac{na}{v}} = 0.$$

De discussie van deze vergelijking kan alleen in bijzondere gevallen geleverd worden.

De eerste term wordt nul voor $v = \frac{1}{2} na$, de tweede voor $v = 0.618\, na$, de derde voor $v = 0.574\, na$.

Voor $v = 0.574\, na$ zouden wij een maximum hebben, als A en $B = 0$ waren. Hieruit blijkt, dat dit maximum slechts weinig zal worden verschoven, tenzij A en B betrekkelijk groote waarden mochten hebben.

Overigens zal ook in dit geval bij bepaalde waarden der gegevens eene opeenvolging van minimum-maximum-minimum mogelijk zijn.

V1a, D6b

DE ENKELVOUDIGE PERIODICITEIT VAN DE FUNCTIËN e^x, SIN x, COS x[1]

DOOR

G. SCHOUTEN.
(Delft.)

---

1. De oneindig voortloopende machtreeks

$$P(x) \equiv 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots.$$

convergeert *gelijkmatig* en *bestendig*. Immers de volstrekte waarde van iederen term is voor elke eindige waarde van x eindig.

Als gelijkmatig convergente reeks is hare grenswaarde onafhankelijk van de volgorde der termen; en omdat ze bestendig convergeert, stelt ze niet enkel een *element* eener functie voor, maar een functie geheel. De reeks moet beschouwd worden als de ontwikkeling dier functie in de omgeving *nul*.

Wil men de ontwikkeling der functie in de omgeving van x_0, dan vervange men x door $x_0 + (x - x_0)$, ontwikkele elken term volgens het binomium en rangschikke de uitkomst van de ontwikkeling naar de klimmende machten van $(x - x_0)$, wat tengevolge van de gelijkmatige convergentie der reeks geen verandering in de grenswaarde zal brengen en dus geoorloofd is.

De uitkomst zal zijn:

$$P\{x_0 + (x - x_0)\} = P(x_0)\, P(x - x_0) \; . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

---

[1]) In hoofdzaak voorgedragen in de vergadering van Februari 1895.

Op de reeks $P(x)$ ben ik gekomen bij mijn poging tot het vinden van den meest algemeenen vorm van de getallen, die de associatieve, de commutatieve, en de distributatieve eigenschap bezitten, waarvan ik op de Algemeene Vergadering van 1898 een overzicht heb gegeven.

Hieruit volgt:

1°. $P(0) = P(x_0 - x_0) = P(x_0)\,P(-x_0)$, of ook, omdat $P(0) = 1$ is:

$$P(-x_0) = 1 : P(x_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

2°. De functie $P(x)$ wordt voor geen enkele eindige waarde van x gelijk nul; want ware $P(x_0) = 0$, dan zou volgens (1) $P(x)$ voor elke waarde van x gelijk nul zijn.

3°. Elke waarde x_0 van x, die $P(x)$ gelijk één maakt, is een *periode* van de functie; want dan is $P(x) = P(x - x_0)$ volgens (1). We sluiten *nul* als oneigenlijke periode uit.

2. *Onderzoek naar het bestaan van perioden.*

Uit de identiteit

$$P(x) - 1 \equiv \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots .$$

volgt in de eerste plaats, dat $P(x)$ voor geen enkele positieve waarde van x gelijk één is; $P(x) - 1$ toch verandert met x van 0 tot ∞.

Dan zal ook $\dfrac{P(x) - 1}{P(x)}$ of $1 - P(-x)$ volgens (2) voor geen enkele positieve waarde van x nul of negatief zijn, m. a. w. $P(x) - 1$ zal voor geen enkele bestaanbare waarde van x gelijk nul worden. Voor positieve waarden van x is $P(x) > 1$, voor negatieve $0 < P(x) < 1$.

Ingeval $P(x)$ dus een periode mocht hebben, moet die noodzakelijk *complex* wezen.

Onderstellen we, dat $a + bi$ een periode, dus $P(a + bi) = 1$ is. Uit

$$P(a + bi) = P(a)P(bi),$$

of

$$1 = P(a)\left\{\left(1 - \frac{b^2}{1\,.\,2} + \frac{b^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots\right) + \right.$$

$$\left. + i\left(\frac{b}{1} - \frac{b^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{b^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \ldots\right)\right\}$$

volgt dan, dat

$$P(a)\left\{1-\frac{b^2}{1.2}+\frac{b^4}{1.2.3.4}-\dots\right\}=1,$$

$$P(a)\left\{\frac{b}{1}-\frac{b^3}{1.2.3}+\frac{b^5}{1.2.3.4.5}-\dots\right\}=0,$$

moet wezen. Maar dan is ook $P(a-bi)=1$. Uit

$$P(a+bi)=P(a)P(bi)=1 \text{ en } P(a-bi)=P(a):P(bi)=1$$

volgt dan verder, dat

$$\{P(a)\}^2=1 \text{ en } \{P(bi)\}^2=1$$

moet wezen; dus is

$$P(a)=\pm 1 \quad , \quad P(bi)=\pm 1.$$

Boven is gevonden, dat $P(x)$ alleen voor $x=0$ de waarde één verkrijgt; bijgevolg zal de periode van $P(x)$, zoo die bestaat, *zuiver imaginair* moeten zijn.

Onderstellen we dan, dat bi een periode van $P(x)$ kon zijn, dat dus $P(bi)=1$ was. Uit

$$P(bi)=\left(1-\frac{b^2}{1.2}+\frac{b^4}{1.2.3.4}-\dots\right)+i\left(\frac{b}{1}-\frac{b^3}{1.2.3}+\dots\right)=1$$

volgt dan, dat

$$\left.\begin{aligned}P_2(b)&\equiv 1-\frac{b^2}{1.2}+\frac{b^4}{1.2.3.4}-\dots=1\\ P_1(b)&\equiv\frac{b}{1}-\frac{b^3}{1.2.3}+\frac{b^5}{1.2.3.4.5}-\dots=0\end{aligned}\right\}$$

zal moeten wezen.

3. *De functiën* $P_2(x)$ *en* $P_1(x)$.

We zijn gekomen tot twee nieuwe functiën

$$P_2(x)\equiv 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\dots,$$

$$P_1(x)\equiv\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\dots,$$

waarvan we moeten onderzoeken, of er een bestaanbare waarde b voor x bestaat, die de eerste gelijk 1, de tweede gelijk *nul* maakt. Iedere zoodanige waarde b geeft een periode bi van $P(x)$.

De functiën $P_2(x)$ en $P_1(x)$ zijn evenals $P(x)$ *gelijkmatig* en *bestendig* convergent, en de reeksontwikkelingen stellen die functiën voor in de omgeving nul.

De ontwikkeling van $P_2(x)$ in de omgeving x_0 geeft in de eerste plaats

$$P_2(x_0 + (x - x_0)) = \sum_0^\infty {}_n\, P_2^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,n}.$$

Omdat $P_2^{(1)}(x_0) = -P_1(x_0)$, $P_2^{(2)}(x_0) = -P_2(x_0)$, $P_2^{(3)}(x_0) = P_1(x)$, $P_2^{(4)}(x_0) = P_2(x_0)$ is, zullen we de ontwikkeling als volgt mogen schrijven:

$$P_2(x_0 + (x - x_0)) = P_2(x_0) \left\{ 1 - \frac{(x - x_0)^2}{1\,.\,2} + \frac{(x - x_0)^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots . \right\} -$$

$$- P_1(x_0) \left\{ \frac{x - x_0}{1} - \frac{(x - x_0)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots . \right\} =$$

$$= P_2(x_0)P_2(x - x_0) - P_1(x_0)P_1(x - x_0) \quad . \; . \; . \; (3)$$

Evenzoo vindt men voor de ontwikkeling van $P_1(x)$ in de omgeving van x_0

$$P_1(x_0 + (x - x_0)) = P_1(x_0)P_2(x - x_0) + P_2(x_0)P_1(x - x_0) \,.\,.\, (4)$$

De functie $P_2(x)$ bezit dus, evenals $P_1(x)$, een *optellings-theorema*, d. w. z. dat er tusschen de functiewaarden $P_2(x + y)$, $P_2(x)$, $P_2(y)$ een algebraische vergelijking bestaat, waarvan de coefficiënten onafhankelijk van de veranderlijken x en y zijn; of ook, wat op hetzelfde neerkomt, dat $P_2(x + y)$ als algebraische functie van $P_2(x)$, $P_2(y)$ en de eerste afgeleiden $P_2'(x)$ en $P_2'(y)$ kan voorgesteld worden. De betrekkingen (3) en (4) toch kunnen als volgt geschreven worden:

$$P_2(x + y) = P_2(x)P_2(y) - \frac{dP_2(x)}{dx}\,\frac{dP_2(y)}{dy},$$

$$P_1(x + y) = P_1(x)\frac{dP_1(y)}{dy} + P_1(y)\frac{dP_1(x)}{dx}.$$

4. *Betrekkingen tusschen* $P(x)$, $P_1(x)$ *en* $P_2(x)$.

Terwijl $P(x)$ met $P_1(x)$ en $P_2(x)$ volgens definitie verbonden is door de identiteit

$$P(ix) \equiv P_2(x) + iP_1(x), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

bestaan er tusschen $P_1(x)$ en $P_2(x)$ betrekkingen, die onmiddellijk volgen uit de beide identiteiten

$$2P_2(x) \equiv P(ix) + P(-ix) \quad , \quad 2iP_1(x) \equiv P(ix) - P(-ix) \ ,$$

nl.
$$\{P_2(x)\}^2 + \{P_1(x)\}^2 \equiv 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (6)$$
$$\{P_2(x)\}^2 - \{P_1(x)\}^2 \equiv P_2(2x)$$
$$2P_2(x)P_1(x) \equiv P_1(2x)$$

5. $P(x)$, $P_1(x)$ *en* $P_2(x)$ *zijn enkelvoudig-periodieke functiën.*

Aangezien de beide functiën $P_1(x)$ en $P_2(x)$ voor bestaanbare waarden van x slechts bestaanbare waarden kunnen aannemen, blijkt uit (6), dat zij $+1$ tot bovengrens, -1 tot benedengrens hebben. Omdat eindelijk die functiën eindig en doorloopend zijn, zullen volgens een bekende functietheoretische stelling [1]) die boven- en die benedengrens ook werkelijk bereikt worden; m. a. w. $+1$ is een *maximum-*, -1 een *minimum-waarde* zoowel van $P_2(x)$ als van $P_1(x)$.

Groeit nu x van nul vloeiend aan, dan zal $P_2(x)$ vloeiend beginnen af te nemen van de waarde 1 af en $P_1(x)$ toenemen van 0 af.

$P_2(x)$ zal dus voor zekere waarde ω van x nul en $P_1(x)$ voor diezelfde waarde één geworden zijn; dus

$$P_2(\omega) = 0 \quad , \quad P_1(\omega) = 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (7)$$

Blijft x aangroeien, dan zal voor zekere waarde $\omega + \omega_1$ van x $P_2(x)$ gelijk -1 en $P_1(x) = 0$ geworden zijn. Maar volgens het optellingstheorema is

$$P_2(\omega + \omega_1) = P_2(\omega)P_2(\omega_1) - P_1(\omega)P_1(\omega_1)$$

of
$$-1 = -P_1(\omega_1) \ ,$$

zoodat volgens (7) $\omega_1 = \omega$ blijkt te zijn. Dus

$$P_2(2\omega) = -1 \quad , \quad P_1(2\omega) = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (8)$$

Bij voortgezette aangroeiing van x zal $P_2(x)$ nu gaan toenemen en $P_1(x)$ dus gaan afnemen, zoodat $P_2(x)$ weer voor zekere waarde $2\omega + \omega_2$ van x gelijk nul en $P_1(x)$ gelijk -1 zal wor-

[1]) Zie O. Biermann, *Theorie der analytischen Functionen*, p. 82.

den; dus $P_2(2\omega+\omega_2)=0$ en $P_1(2\omega+\omega_2)=-1$. Volgens het optellingstheorema is echter

$$P_1(2\omega+\omega_2)=P_1(2\omega)P_2(\omega_2)+P_2(2\omega)P_1(\omega_2),$$

of volgens (8)

$$-1=-P_1(\omega_2),$$

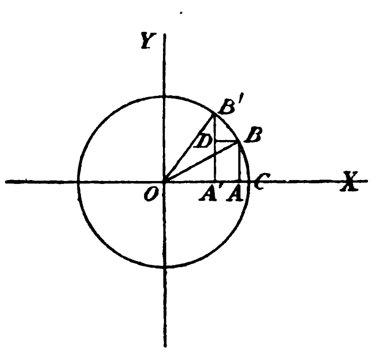
zoodat ook hier $\omega_2=\omega$ is, en $P_2(3\omega)=0$, $P_3(3\omega)=-1$ is.

Eindelijk zal, wanneer x met een bedrag $3\omega+\omega_3$ is toegenomen, $P_2(x)$ weer gelijk $+1$ en $P_1(x)$ gelijk 0 geworden zijn, dus $P_2(3\omega+\omega_3)=1$ en $P_1(3\omega+\omega_3)=0$. Maar uit het optellingstheorema voor $P_2(x)$ volgt weer, dat $\omega_3=\omega$ is, zoodat

$$P_2(4\omega)=1 \quad , \quad P_1(4\omega)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

is. Hieruit blijkt, dat 4ω de getalwaarde b is, die we zochten, en, afgezien van positieve en negatieve veelvouden, de eenige is. $P(x)$ heeft dus de eenige periode $4\omega i$.

Tevens is gebleken, dat 4ω een periode is zoowel van $P_2(x)$ als van $P_1(x)$. Omdat $P_2(x)$ en $P_1(x)$ volgens (6) slechts gemeenschappelijke perioden kunnen hebben, en volgens (5) die gemeenschappelijke periode ook gemeen moet wezen aan $P(ix)$, zoo blijkt, dat ook $P_2(x)$ en $P_1(x)$ evenals $P(x)$ *enkelvoudig-periodiek* zijn [1]).



6. *Voor bestaanbare waarden van x is* $P_2(x)\equiv\cos x$, $P_1(x)\equiv\sin x$.

Dit moet meetkundig bewezen worden.

Wordt $P_2(x)$ als abscis OA en $P_1(x)$ als ordinaat AB uitgezet op een rechthoekig assenstelsel, dan zal volgens (6) het punt B langs een cirkelomtrek bewegen, die den oorsprong O tot middelpunt en de eenheid tot straal heeft, wanneer

[1]) Bij mijn voordracht heb ik, om de periodiciteit te bewijzen, gesteund op de theorie van de maximum- en minimumwaarden eener functie, wat bij eene elementaire behandeling als deze minder op zijn plaats is.

Ik redeneerde daarbij als volgt: $P_2(x)$ heeft tot afgeleide $-P_1(x)$; als x van 0 af vloeiend gaat toenemen, zal $P_2(x)$ van 1 gaan afnemen en $P_1(x)$ van 0 gaan toenemen. Dit afnemen van $P_2(x)$ zal niet kunnen eindigen, tenzij $P_1(x)$ weer gelijk nul geworden is, dus wanneer $P_2(x)$ de waarde -1 heeft verkregen; enz.

x vloeiend verandert. Voor $x = 0$ is B in C; groeit x van 0 aan, dan beweegt het punt B zich van C uit langs den cirkelomtrek in een richting, die tegengesteld is aan die van de wijzers eener klok. De daarbij doorloopen boog CB is dus een functie van x. We zullen aantoonen, dat boog $CB = x$ is, waarmede dan het gestelde bewezen is.

Als x met Δx aangroeit, dan zal $P_2(x)$ met $BD = P_2(x+\Delta x) - P_2(x)$ en $P_1(x)$ met $DB' = P_1(x + \Delta x) - P_1(x)$ veranderen.

Nu is dus

$$\{P_2(x + \Delta x) - P_2(x)\}^2 + \{P_1(x + \Delta x) - P_1(x)\}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DB}'^2 =$$
$$= (\text{koorde } BB')^2,$$

of na deeling door Δx:

$$\left(\frac{P_2(x + \Delta x) - P_2(x)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{P_1(x + \Delta x) - P_1(x)}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\text{koorde } BB'}{\Delta x}\right)^2.$$

Gaat men tot de limiet over, dan wordt het eerste lid $(P_2'(x))^2 + (P_1'(x))^2$, waarvoor $(P_1(x))^2 + (P_2(x))^2$, dus volgens (6) één geschreven kan worden; bijgevolg is limiet koorde $BB' =$ = limiet Δx, of als boog $BC = s$ gesteld wordt:

$$ds = dx.$$

Omdat zoowel x als s met 0 beginnen, blijkt, dat $BC = x$ en bijgevolg $P_2(x) \equiv \cos x$, $P_1(x) \equiv \sin x$ is.

De periode 4ω is bijgevolg 2π, en die van $P(x)$ dus $2\pi i$.

Het optellingstheorema voor $P_2(x)$ en dat voor $P_1(x)$ gaat nu voor bestaanbare waarden van x over in

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

de bekende grondformulen uit de trigonometrie. Niets staat nu in den weg, om de functie $P_2(x)$ de cosinusfunctie, $P_1(x)$ de sinusfunctie te noemen, aangezien de grondformulen voor elke complexe waarde van de veranderlijke doorgaan.

Evenzoo mogen we $P(x)$ vervangen door e^x.

Immers uit het optellingstheorema $P(x)P(y) = P(x + y)$ volgt

voor $x = y = 1$: $\qquad P^2(1) = P(2)$,

voor $x = 1$, $y = 2$: $\qquad P^3(1) = P(3)$,

en zoo in 't algemeen voor geheele getalwaarde van n

$$P^n(1) = P(n).$$

Wordt nu

$$P(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \ldots\ldots = e$$

gesteld, dan is

$$P(n) = e^n ;$$

en nu mogen we voor elke waarde van x

$$P(x) \equiv e^x$$

definieeren, omdat $P(x)$ alle grondregelen van de machten, nl. $P(x)\,.\,P(y) = P(x+y)$, $P(-x) = 1 : P(x)$, $P(0) = 1$, volgt.

De identiteit (5) gaat nu over in

$$e^{ix} \equiv \cos x + i \sin x ,$$

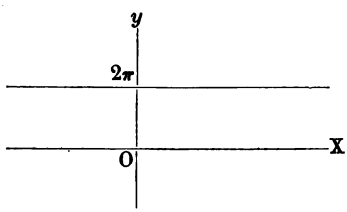
welke, door het verheffen van beide leden tot een willekeurige macht μ, het theorema van DE MOÎVRE geeft, nl.

$$(e^{ix})^\mu \equiv (\cos x + i \sin x)^\mu \equiv \cos \mu x + i \sin \mu x.$$

7. *De getalwaarden, die* e^z, $\sin x$ *en* $\cos x$ *kunnen aannemen.*

a). e^z. Wanneer de complexe veranderlijke $z = x + iy$ met $2\pi i$ verandert, zal e^z dezelfde waarde behouden. Alle waarden, die e^z kan aannemen, zullen dus gevonden worden, door x alle bestaanbare waarden van $-\infty$ tot $+\infty$ en y alle bestaanbare waarden van 0 tot 2π te laten doorloopen.

Meetkundig beteekent dit, dat e^z alle getalwaarden, die ze *kan* aannemen, zal verkrijgen, als de complexe z de strook doorloopt, begrepen tusschen de as OX en de parallel aan OX op een afstand 2π, waarbij de as OX in het veld van beweging wordt opgenomen.



Het is gemakkelijk in te zien, dat e^z *elke* waarde en deze slechts *eenmaal* zal aannemen, als z zich over deze strook beweegt.

Beweegt z zich langs de as OX, dan doorloopt e^x alle *positieve* waarden.

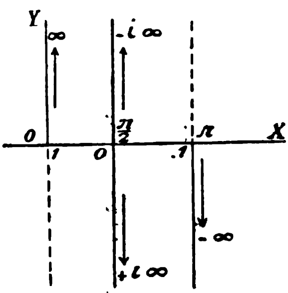
Beweegt z zich langs de parallel $y = \pi$, zoodat z van den vorm $x + \pi i$ en $e^z = e^{x + \pi i} = -e^x$ is, dan verkrijgt e^z alle *negatieve* waarden.

De beweging langs de parallel $y = \frac{1}{2}\pi i$ en de parallel $y = \frac{3}{2}\pi i$ doet e^z alle *zuiver imaginaire* waarden doorloopen.

Voor alle overige plaatsen van de strook zal e^z elke complexe waarde $a + bi$ aannemen. Want, wat a en b ook mogen wezen, altijd zal $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ door $\cos y$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ door $\sin y$ kunnen vervangen worden, waar y tusschen 0 en 2π is gelegen, en ondubbelzinnig is bepaald.

Stel nu $\sqrt{a^2 + b^2} = e^x$, waar x zeker bestaat en reëel is; verder $\cos y + i \sin y = e^{iy}$, waar y zeker bestaat en tusschen 0 en 2π ligt. Dan is $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) =$
$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x + iy}$; dus bij elke complexe waarde $a + bi$ behoort één bepaalde exponent $x + iy$ van e^z.

Elk getal kan dus voorgesteld worden door $e^{x + i\theta}$, waar x en θ bestaanbaar zijn, en $2\pi > \theta \geqq 0$; of ook, omdat e^x elk reëel positief getal kan voorstellen, door $\rho e^{i\theta}$. Dan heet ρ, zooals bekend is, de *modulus*, θ de *amplitudo* van het getal.



b. $\cos z$. Op dezelfde wijze blijkt, dat $\cos z$ *elke* waarde slechts *eenmaal* aanneemt in de strook, begrepen tusschen de as OY en de lijn $y = \pi$, hierbij alleen de positieve as OY en het negatieve deel van de lijn $y = \pi$ in het veld van beweging opnemende.

Verandert z van 0 tot π, dan $\cos z$ van 1 over 0 tot -1;
„ z „ 0 „ $i\infty$, „ $\cos z$ „ 1 tot ∞,
„ z „ π „ $\pi - i\infty$, „ $\cos z$ „ -1 tot $-\infty$,

zoodat $\cos z$ bij deze bewegingen alle *bestaanbare* waarden heeft doorloopen.

Verandert z van $\frac{\pi}{2}$ tot $\frac{\pi}{2} + i\infty$, dan $\cos z$ van 0 tot $-i\infty$,

„ z „ $\frac{\pi}{2}$ „ $\frac{\pi}{2} - i\infty$, „ $\cos z$ „ 0 „ $+i\infty$,

zoodat nu $\cos z$ alle *zuiver imaginaire* getalwaarden heeft verkregen.

Voor elke andere plaats van z binnen genoemde strook is de getalwaarde van $\cos z$ van den vorm $a + bi$, waar a en b elke bestaanbare waarde kunnen hebben.

Is $z = x + iy$, dus $\pi > x > 0$ en verschillend van $\frac{\pi}{2}$, terwijl y elke waarde kan hebben, dan moeten we aantoonen, dat bij elke a en b een bepaalde x en y behoort. Uit

$$a + bi = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy,$$

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = 1 + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

$$\sin iy = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y}) = i\left(\frac{y}{1} + \frac{y^3}{1.2.3} + \dots\right)$$

volgt:

$$\left.\begin{array}{l}\cos x \cos iy = a \\ \sin x \sin iy = bi\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}\cos iy = \dfrac{a}{\cos x} \\ \sin iy = \dfrac{b}{\sin x} i\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{a}{\cos iy} \\ \sin x = \dfrac{b}{\sin iy} i\end{array}\right\}. \quad (10)$$

dus ook:

$$\frac{a^2}{\cos^2 x} - \frac{b^2}{\sin^2 x} = 1, \quad \frac{a^2}{\cos^2 iy} - \frac{b^2}{\sin^2 iy} = 1,$$

of

$$\frac{2a^2}{1 + \cos 2x} - \frac{2b^2}{1 - \cos 2x} = 1, \quad \frac{2a^2}{1 + \cos 2iy} - \frac{2b^2}{1 - \cos 2iy} = 1.$$

Worden de breuken verdreven en de cosinussen opgelost, dan vindt men zoowel voor $\cos 2x$ als voor $\cos 2iy$ de uitdrukking

$$a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 - 1)^2 + 4b^2},$$

of, wat hetzelfde is,

$$a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2}.$$

Kiest men nu voor $\cos 2x$ het *onderste*, voor $\cos 2iy$ het *bovenste* van het dubbele teeken, dan is

$$\cos 2x - 1 < 0 \quad , \quad \cos 2x + 1 > 0,$$
$$\cos 2iy - 1 > 0 \quad ,$$

waaruit volgt, dat voor x en voor y altijd bestaanbare waarden kunnen gekozen worden, welke voldoen aan $\cos(x+iy)=a+bi$, wat ook a en b mogen wezen, en waarbij $0 < 2x < 2\pi$ is.

Dat er eindelijk slechts één keuze voor x en y is, blijkt als volgt: $\sin x$ moet positief zijn, dus moet volgens (10) het teeken van y gelijk aan dat van b gekozen worden. Verder moet volgens (10) $\cos x$ het teeken van a hebben. Hierdoor zijn x en y ondubbelzinnig bepaald.

c. $\sin z$. Op soortgelijke wijze blijkt, dat $\sin z$ elke waarde slechts eenmaal aanneemt in de strook, die men verkrijgt, door de strook bij $\cos z$ beschouwd een weg $\frac{\pi}{2}$ in de richting van de as OX te verschuiven.

8. *Voor* $z=\infty$ *neemt elk der functiën* e^z, $\sin z$, $\cos z$ *elke getalwaarde aan.*

Is $a+bi$ een willekeurig getal, dan is boven bewezen, dat altijd een waarde van $z=x+iy$ kan gevonden worden, zoodanig dat $e^z=a+bi$ is. Wordt nu z op zoodanige wijze tot ∞ gebracht, dat bij y een onbepaald aantal 2π wordt opgeteld, dan behoudt e^z dezelfde waarde $a+bi$, die ze dus ook zal hebben voor $z=\infty$.

Laat men evenzoo in $\cos z=\cos(x+iy)=a+bi$ de complexe z oneindig groot worden, door x met een onbepaald aantal getalwaarden 2π te vermeerderen of te verminderen, dan zal $\cos z$ steeds dezelfde waarde $a+bi$ behouden en dus ook bezitten voor $z=\infty$.

Hetzelfde geldt voor $\sin z$.

9. *De functiën* e^z, $\sin z$, $\cos z$ *zijn geheele transcendente functiën.*

Zij onderscheiden zich, zooals we gezien hebben, hierin van de geheele functiën van eindigen graad, dat ze voor $z=\infty$ *elke* getalwaarde aannemen, terwijl deze voor $z=\infty$ er slechts een hebben, nl. ∞.

Zooals bekend is, heet het punt $z=\infty$ voor onze functiën een *wezenlijk bijzonder punt* (point critique), terwijl het voor den geheelen n^{en} graadsvorm een *onwezenlijk bijzonder punt* (pool) genoemd wordt. Het punt $z=\infty$ stempelt onze functiën tot transcendente, die, omdat ze voor eindige waarden van z eindig zijn, *geheele transcendente functiën* genoemd worden.

EENIGE OPMERKINGEN NAAR AANLEIDING VAN EMIL WEYR'S „BEITRÄGE ZUR CURVENLEHRE"

DOOR

H. DE VRIES.
(Haarlem.)

§ 1. In het voor de ontwikkeling der nieuwere meetkunde zoo belangrijke werkje van EMIL WEYR, getiteld *Beiträge zur Curvenlehre* (Wien, Alfred Hölder, 1880), komt op pag. 28 sqq. een bewijs voor van de stellingen van PONCELET omtrent gelijktijdig om- en ingeschreven veelhoeken dat onjuist is, aangezien de schrijver als gemeenschappelijke raaklijnen van twee kegelsneden 4 rechte lijnen vindt, waarvan gemakkelijk is aan te toonen dat geen van haar de beide kegelsneden aanraakt, en dan, hierop voortbouwend, als bewezen aanneemt dat beide krommen samenvallen zoodra zij nog één verdere raaklijn gemeen hebben.

Wij zullen nu in de volgende bladzijden in de eerste plaats beproeven Schrijvers bewijs van deze onjuistheid te ontdoen.

De stellingen in kwestie zijn deze:

Wanneer een veranderlijke enkelvoudige n-hoek (met n zijden dus) in een kegelsnee beschreven is, en alle zijden op één na aan een tweede kegelsnee raken, dan zal de laatste zijde steeds een derde kegelsnee aanraken, die door de snijpunten van de beide eerste gaat.

En verder:

Wanneer een veranderlijke enkelvoudige n-hoek om een kegelsnee beschreven is, en alle hoekpunten op één na een tweede kegelsnee doorloopen, dan zal het laatste hoekpunt een derde kegelsnee doorloopen, die de vier gemeenschappelijke raaklijnen der beide eerste aanraakt.

Het spreekt van zelf dat slechts één van deze beide stel-

lingen bewezen behoeft te worden, daar de tweede uit de eerste kan worden afgeleid met behulp van het beginsel van dualiteit. Uit beide stellingen volgt nog deze derde:

Zoodra er één n-hoek bestaat, die tegelijkertijd *in* de eerste en *om* de tweede kegelsnee beschreven is, bestaan er oneindig vele; de hoekpunten van al deze n-hoeken bepalen op de kegelsnee, waarop zij liggen, een involutie van den n^{en} graad en den eersten rang, I^1_n, terwijl de zijden aan de tweede kegelsnee een involutorisch raaklijnenstelsel bepalen, eveneens van den n^{en} graad en den rang 1.

§ 2. Zijn twee kegelsneden gegeven, k_2 en k'_2, dan kan men uit een willekeurig punt x_1 van k_2 twee raaklijnen trekken aan k'_2; noemen wij de tweede snijpunten dezer raaklijnen met k_2 x_2 en x'_2, dan kan men nu uit elk van *deze* twee punten aan k'_2 nog slechts één raaklijn trekken, en uit de tweede snijpunten van deze met k_2, x_3 en x'_3, weer slechts één, enz. Zet men deze constructie voort tot aan de punten x_n, x'_n, dan ziet men dat op deze wijze aan ieder punt x_1 van k_2 twee punten, x_n, x'_n, worden toegevoegd. Gaat men omgekeerd van het zooeven gevonden punt x_n uit, dan kan men weer aan k'_2 twee raaklijnen trekken, waarvan de eene reeds getrokken is en naar het punt x_{n-1} heenvoert, terwijl de andere k_2 voor de tweede maal zal snijden in een punt x'_{n-1}. Van de beide punten x_{n-1} en x'_{n-1} kan men nu weer slechts één raaklijn trekken aan k'_2, en van deze beide is er één, nl. $x_{n-1}\,x_{n-2}$, reeds getrokken, enz. Zet men deze constructie voort tot aan de punten x_1, x'_1, dan ziet men dat x_1 samenvalt met het punt van waar uit wij de constructie zijn begonnen, terwijl x'_1 nieuw is, en dat dus bij ieder punt x_1 van k_2 twee punten x_n, x'_n behooren, terwijl ook omgekeerd aan ieder punt x_n twee punten x_1, x'_1, zijn toegevoegd. Maar verder volgt uit deze constructie ook, dat bij ieder punt van k_2 steeds dezelfde twee punten behooren, onverschillig of wij het punt van uitgang x_1 of x_n noemen; de punten x_1 en x_n vormen dus op k_2 een zoogenaamd „symmetrisch puntenstelsel van den tweeden graad"[1]).

Verbinden wij ieder punt x_1 van k_2 met de beide toegevoegde

---

[1]) E. Weyr, *Beiträge*, p. 8.

punten x_n, x'_n, dan zullen al deze oneindig vele verbindingslijnen een kegelsnee omhullen, omdat er uit ieder punt van k_2 twee raaklijnen aan deze kromme getrokken kunnen worden; zij wordt door EMIL WEYR „Directionscurve" [1]) genoemd, en dient er toe de aan een willekeurig punt x_1 van k_2 toegevoegde punten x_n, x'_n rechtstreeks te vinden, zonder dat het noodig is een, voor het geval dat n een groot getal is, langen omweg te maken langs de kegelsnee k'_2.

Denken wij de raaklijnen geconstrueerd, die de zooeven beschreven „richtkromme" d_2 met k_2 gemeen heeft, dan zien wij, dat in de raakpunten van deze raaklijnen met k_2 telkens twee toegevoegde punten x_1 en x_n samenvallen, terwijl x'_n het tweede snijpunt is met k_2 van de tweede raaklijn, die men van uit elk der vier genoemde punten $x_{1,n}$ nog aan k'_2 kan trekken. Deze 4 punten $x_{1,n}$ zijn de 4 „dubbelpunten van de eerste soort" van het symmetrische puntenstelsel op k_2. Er bestaan nl. ook nog 4 „dubbelpunten van de tweede soort". Wanneer wij nl. het punt x_1 eens plaatsen in één van de 4 snijpunten van k_2 en d_2, dan kan men van uit dit punt slechts één raaklijn trekken aan de richtkromme d_2; in het tweede snijpunt dezer raaklijn met k_2 liggen dan de beide punten x_n, x'_n vereenigd, en zulke punten heeten dubbelpunten van de tweede soort. Noemen wij dus de 4 snijpunten v_1, v_2, v_3, v_4 van k_2 en d_2 vertakkingspunten van het symmetrische puntenstelsel, dan kunnen wij zeggen dat wij de 4 dubbelpunten van de tweede soort v^1_n, v^2_n, v^3_n, v^4_n verkrijgen, door in de 4 vertakkingspunten van het stelsel de raaklijnen te trekken aan d_2.

Nu moet het echter ook mogelijk zijn de zooeven gevonden 4 punten v^1_n, v^2_n, v^3_n, v^4_n te vinden met behulp van de kegelsnee k'_2, en men ziet onmiddellijk in dat men hierin slaagt wanneer men slechts het uitgangspunt x_1 in een van de 4 snijpunten van k_2 en k'_2 aanneemt; immers dan kan men van uit dit punt slechts één raaklijn trekken aan k'_2, zoodat de beide punten x_2, x'_2, en dus ook x_3, x'_3 . . . . , en eindelijk ook x_n, x'_n samenvallen. Nu bezit ons puntenstelsel slechts 4 dubbelpunten van de 2e soort, nl. v^1_n, v^2_n, v^3_n, v^4_n; elk dezer punten bevat twee samenvallende punten x_n, x'_n, en aan elk zoodanig puntenpaar is slechts één punt x_1 toegevoegd, zoodat

---

[1]) l. c. p. 6.

er op k_2 slechts 4 punten x_1 mogelijk zijn, die aanleiding geven tot twee samenvallende punten x_n, x'_n; wij hebben er echter 8 gevonden, nl. de snijpunten van k_2 met d_2, en die van k_2 met k'_2, *dus moeten de drie kegelsneden k_2, k'_2, d_2 door dezelfde vier punten v_1, v_2, v_3, v_4 gaan.*

§ 3. Wij hebben dus in de voorgaande paragraaf aangetoond, dat wanneer de eerste $n-1$ zijden van een in een kegelsnee k_2 beschreven n-hoek steeds een zelfde kegelsnee k'_2 aanraken, dan ook de laatste zijde $x_n x_1$ een zekere kegelsnee d_2 moet aanraken, die door de snijpunten der beide eerste heengaat; en hiermede is de eerste der in § 1 genoemde stellingen, en dus implicite ook de tweede, bewezen.

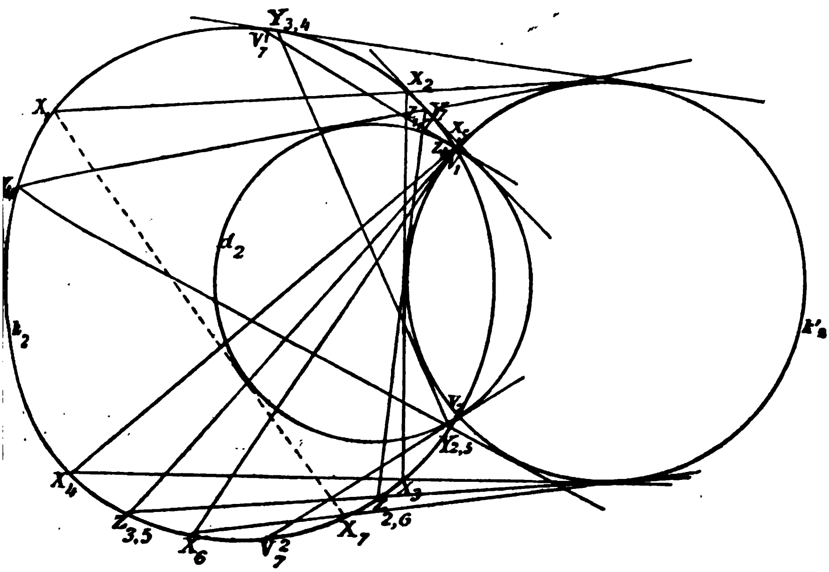


Fig. 1.

In Fig. 1 is de constructie uitgevoerd voor het geval $n = 7$ en in de bizondere onderstelling, dat k_2 en k'_2 beide cirkels zijn. Dit heeft ten gevolge, dat ook d_2 een cirkel wordt, omdat deze de 4 snijpunten van k_2 en k'_2, en dus ook de beide absolute punten in het oneindige, moet bevatten; overigens echter blijven zoowel de constructie als het bewijs onveranderd.

Trekt men in de beide op eindigen afstand gelegen vertakkingspunten v_1, v_2, voor zoover zij bestaanbaar zijn, de raaklijnen aan d_2, dan vindt men de beide dubbelpunten van de tweede soort v^1_7, v^2_7; om de beide andere te verkrijgen zou men in de beide onbestaanbare cirkelpunten in het oneindige de raaklijnen moeten trekken aan d_2 en deze voor de tweede maal met k_2 moeten snijden, wat wel is waar op zeer eenvoudige wijze mogelijk is, maar natuurlijk aanleiding geeft tot twee toegevoegd onbestaanbare punten v^3_7 en v^4_7 [1]).

Nu is er natuurlijk geen enkele reden, waarom de raaklijnen in de punten v^1_7, v^2_7, v^3_7, v^4_7 (of algemeen $v^1_n \ldots . v^4_n$) aan k_2 de beide kegelsneden k'_2 en d_2 zouden moeten aanraken, aangezien k'_2 slechts wordt aangeraakt door die rechten, die twee op elkaar volgende hoekpunten van een zelfden n-hoek verbinden, (behalve de lijnen $x_n x_1$), d_2 slechts door de lijnen $x_n x_1$, en de raaklijnen in $v^1_n \ldots . v^4_n$ aan k_2 tot geen van deze beide groepen behooren; de onjuistheid van het bewijs van Weyr ligt nu hierin, dat hij uitdrukkelijk *zegt*, dat deze raaklijnen aan k_2 tevens d_2 moeten aanraken, en er later stilzwijgend gebruik van maakt dat zij ook k'_2 aanraken, en dan als bewezen aanneemt dat d_2 en k'_2 samenvallen, zoodra zij nog bovendien één andere raaklijn gemeen hebben.

De vraag, die wij ons te stellen hebben, is dus nu deze: wat is dan *wel* de beteekenis der vier gemeenschappelijke raaklijnen van d_2 en k'_2? Om deze vraag te kunnen beantwoorden moeten wij onderscheid maken tusschen de beide gevallen n-oneven en n-even; daarom hebben wij in Fig. 2 ook nog het geval $n = 6$ geconstrueerd, en zullen wij ons nu in het vervolg bepalen

---

[1]) Trekt men in de beide cyclische punten de raaklijnen aan d_2, dan snijden deze elkaar in het middelpunt M_{d_2} van d_2; men heeft dus slechts dit punt met de beide cyclische punten I_1 en I_2 te verbinden en deze verbindingslijnen voor de tweede maal in I'_1 en I'_2 met k_2 te snijden. Nu vormen de 4 punten $I_1 I_2 I'_1 I'_2$ een volledigen vierhoek, die in k_2 beschreven is en waarvan het punt $M_{d_2} = (I_1 I'_1, I_2 I'_2)$ het eene diagonaalpunt is, terwijl de beide overige diagonaalpunten $P = (I_1 I'_2, I_2 I'_1)$ en $Q = (I_1 I_2, I'_1 I'_2)$ de poollijn $PQ = m$ van M_{d_2} ten opzichte van k_2 bepalen. De lijn $I'_1 I'_2$, de verbindingslijn der beide gezochte punten, is dus de aan de lijn $I_1 I_2$ toegevoegde 4e harmonische straal ten opzichte van het stralenpaar $PQ = m$ en QM_{d_2}. Maar de lijn $I_1 I_2$ verbindt de beide cyclische punten en ligt dus op oneindigen afstand; de lijn $I'_1 I'_2$ loopt dus evenwijdig aan de poollijn m van M_{d_2} ten opzichte van k_2, en wel juist in het midden tusschen het punt M_{d_2} en de lijn m. De punten I'_1, I'_2 zelf eindelijk zijn de dubbelpunten der elliptische poolinvolutie, die k_2 op deze lijn bepaalt.

tot de beide gevallen 7 en 6, daar de overgang van deze tot de algemeene gevallen zonder eenige moeite kan geschieden.

Wanneer wij een willekeurig punt van k_2 beschouwen als het hoekpunt x_2 van een n-hoek van PONCELET, dan gaan van uit dit punt in het algemeen twee raaklijnen aan k'_2; hiervan snijdt de eene k_2 voor de tweede maal in x_1, de andere in x_3, en daarbij is het onverschillig, welk van de beide punten men x_1 en welk x_3 noemt. Beschouwt men een dergelijk willekeurig

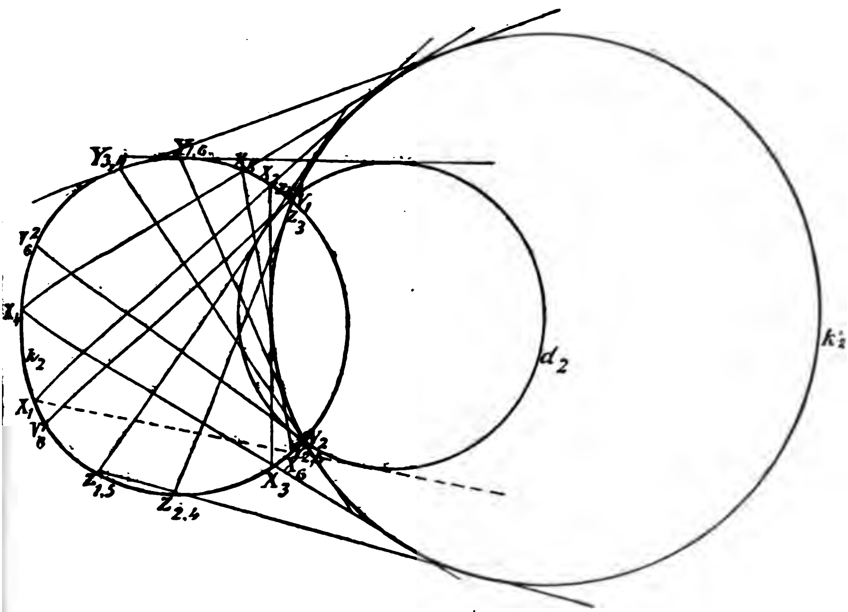


Fig. 2.

punt als x_3, dan levert één van de beide raaklijnen aan k'_2 het punt x_2, de andere het punt x_4, enz. Nu willen wij in het bizonder in Fig. 1 één van de vier gemeenschappelijke raaklijnen van k_2 en k'_2 beschouwen, en het raakpunt met k_2 y_3 (dus algemeen $y_{\frac{n-1}{2}}$) noemen; dan valt dus één van de twee punten y_2, y_4 — en wij nemen hiervoor y_4 — met y_3 samen, zoodat wij dit punt ook $y_{3,4}$ kunnen noemen. Nu gaat verder van y_3 aan k'_2 de tweede raaklijn y_3y_2, van y_4 de tweede raaklijn y_4y_5; deze raaklijnen vallen echter samen, hun tweede snijpunt is dus $y_{2,5}$, en de tweede raaklijn van uit dit punt aan k'_2

voert naar het punt $y_{1,6}$. De tweede raaklijn uit y_6 aan k'_2 levert het punt y_7 op; maar nu is de lijn $y_6 y_7$ identisch met de lijn $y_1 y_7$, die volgens het voorgaande de kegelsnee d_2 moet aanraken; *van uit het punt* $y_{1,6}$ *kan men dus een gemeenschappelijke raaklijn trekken aan* k'_2 *en* d_2.

En hiermede is dus de volgende stelling bewezen: *Voor n-oneven stellen de gemeenschappelijke raaklijnen van* k'_2 *en* d_2 *de beide samenvallende zijden* $y_{n-1}\, y_n$, $y_n\, y_1$ *van die bijzondere n hoeken voor, voor welke de zijde* $y_{\frac{n-1}{2}}\, y_{\frac{n+1}{2}}$ *samenvalt met één der 4 gemeenschappelijke raaklijnen van* k_2 *en* k'_2, *zoodat de genoemde hoekpunten zelf samenvallen in het raakpunt met* k_2.

Wij hebben dus hier tegelijkertijd aangetoond, dat iedere gemeenschappelijke raaklijn van k_2 en k'_2 is toegevoegd aan een bepaalde gemeenschappelijke raaklijn van k'_2 en d_2, doordien zij beide behooren tot eenzelfden, hoewel ontaarden, veelhoek van Poncelet.

Met het oog op het zoo straks te onderzoeken geval n-even is het noodzakelijk ook de beteekenis der gemeenschappelijke raaklijnen van k_2 en d_2 aan te geven. Beschouwen wij te dien einde het vertakkingspunt v_1 als een hoekpunt z_4, dus algemeen $z_{\frac{n+1}{2}}$, dan kan in dit punt slechts één raaklijn aan k'_2 getrokken worden, wat ten gevolge heeft, dat achtereenvolgens de punten z_3, z_5, dan z_2, z_6 en eindelijk z_1, z_7 samenvallen. De verbindingslijn z_1, z_7 wordt dus nu een raaklijn aan k_2, moet echter tevens d_2 aanraken, en is dus een gemeenschappelijke raaklijn van beide.

Voor het geval n-oneven is dus aan ieder vertakkingspunt v een gemeenschappelijke raaklijn van k_2 *en* d_2 *op ondubbelzinnige wijze toegevoegd.*

§ 4. Wanneer n een even getal is vindt men eenigszins andere uitkomsten. Wanneer wij in Fig. 2 eveneens een gemeenschappelijke raaklijn van k_2 en k'_2 beschouwen en het raakpunt met k_2 $y_{3,4}$ noemen, dan vindt men door het herhaald trekken van raaklijnen aan k'_2 achtereenvolgens de punten $y_{2,5}$ en $y_{1,6}$. De raaklijn nu in dit laatste punt aan k_2 moet tevens een raaklijn zijn aan d_2; *voor het geval n-even dus zijn de gemeenschappelijke raaklijnen van* k_2 *en* k'_2 *één aan één toegevoegd*

aan die van k_2 en d_2, en dus niet, zooals in de vorige paragraaf, aan die van k'_2 en d_2. Deze laatste staan hier in verband met de vertakkingspunten; beschouwen wij nl. het punt v_1 als het hoekpunt z_3 (algemeen $z_{\frac{n}{2}}$) van een zekeren n-hoek van PONCELET, dan geeft het tweede snijpunt van de raaklijn in dit punt aan k'_2 met k_2 een punt $z_{2,4}$, de raaklijn van dit punt aan k'_2 het punt $z_{1,5}$, en de raaklijn van z_5 aan k'_2 z_6. De lijn z_5z_6 valt dan echter samen met z_1z_6 en moet dus tevens d_2 aanraken.

Voor n-even is dus aan ieder vertakkingspunt één van de vier gemeenschappelijke raaklijnen van k'_2 en d_2 op ondubbelzinnige wijze toegevoegd.

In beide gevallen hebben wij dus aangetoond, dat de gemeenschappelijke raaklijnen van d_2 en k'_2 een bepaalde beteekenis hebben, die gevonden kan worden door zekere bizondere, nl. gedegenereerde, veelhoeken te beschouwen. Zoodra er dus één *algemeene* veelhoek bestaat, die de eigenschap bezit, dat niet alleen de $n-1$ eerste zijden, doch ook de laatste, x_nx_1, die in het algemeen d_2 aanraakt, k'_2 aanraakt, dan hebben k'_2 en d_2 vijf raaklijnen gemeen en moeten zij dus samenvallen. Dan neemt k'_2 de eigenschappen van d_2 over, en moeten dus van iederen n-hoek alle zijden zonder uitzondering k'_2 aanraken, waarmede de 3e stelling van § 1 bewezen is.

Hoewel ook in dit geval bij ieder punt x_1 nog steeds twee verschillende punten x_n behooren, zal toch ieder punt van k_2 een hoekpunt zijn van slechts één n-hoek van PONCELET; want aangezien de zijde x_nx_1 nu ook de kegelsnee k'_2 moet aanraken, en er van uit x_1 slechts twee raaklijnen mogelijk zijn, moet de eene de zijde x_1x_2, de andere x_1x_n voorstellen; en hoewel het nu onverschillig is, welke van de twee men x_1x_2 en welke x_1x_n wil noemen, zoo spreekt het toch van zelf dat men in beide gevallen denzelfden veelhoek vindt, dien men eenvoudig in twee verschillende richtingen doorloopt. Maar verder is het duidelijk dat men, in tegenstelling met het vroegere geval, steeds denzelfden veelhoek zal vinden, van welk van de n hoekpunten men ook moge uitgaan, of dat m. a. w. de n hoekpunten een op zich zelf staande, afgesloten groep van n punten vormen, die bepaald is, zoodra één van deze punten, onverschillig welk, willekeurig is aangenomen. *Alle hoekpunten van alle mogelijke veelhoeken tezamen vormen dus op k_2 een involutie van den n^{en} graad en den eersten rang*, I^1_n.

Wanneer men de n punten van een willekeurige groep eener I^1_n op alle mogelijke manieren met elkaar verbindt, dan zullen de $\frac{n(n-1)}{1.2}$ verbindingslijnen van alle groepen een zekere kromme van de klasse $n-1$ en den graad $(n-1)(n-2)$ omhullen, de zoogenaamde „Involutionscurve" [1]) i_{n-1}, die de eigenschap bezit, dat de $2(n-1)$ raaklijnen, die zij met k_2, den drager der involutie, gemeen heeft, deze laatste kromme aanraken in de $2(n-1)$ dubbelpunten van I^1_n; dat haar $2(n-1)(n-2)$ snijpunten met k_2 de vertakkingspunten zijn van I^1_n, en dat de raaklijnen in deze punten aan i_{n-1} in groepen van telkens $n-2$ door de bovengenoemde $2(n-1)$ dubbelpunten gaan, nl. telkens door dat dubbelpunt, dat met de $n-2$ vertakkingspunten een volledige groep van I^1_n vormt, aangezien bij de involutie het onderscheid tusschen dubbelpunten van de eerste en van de tweede soort wegvalt, en ieder dubbelpunt van de eerste soort voor $n-2$ samenvallende van de tweede soort geldt. Wij zullen nu in de volgende § nog onderzoeken, hoe deze involutiekromme i_{n-1} er in ons geval uitziet, waardoor wij dan tevens gelegenheid vinden de stellingen, die Schrijver op pag. 30 en 31 behandelt, langs eenigszins anderen weg te bewijzen en in enkele opzichten aan te vullen.

§ 5. Het is gemakkelijk in te zien, dat voor het geval der gelijktijdig in- en omgeschreven veelhoeken van Poncelet de kromme i_{n-1} uit verschillende afzonderlijke krommen moet bestaan. De kegelsnee k'_2 zelf is bijv. één van die afzonderlijke deelen, daar zij wordt aangeraakt door al de verbindingslijnen van punten van eenzelfde groep, die twee op elkaar volgende hoekpunten van een n-hoek met elkaar verbinden; de raakpunten op k_2 van de vier gemeenschappelijke raaklijnen van k_2 en k'_2 zijn dus vier van de $2(n-1)$ dubbelpunten van I^1_n, en de tweede snijpunten met k_2 van de raaklijnen in de vier punten $v_1 \ldots . v_4$ aan k'_2 zijn 4 andere; inderdaad valt in elk der vier eerste punten een punt x_1 met het punt x_2 van eenzelfde groep samen, in de laatste bijv. een punt z_3 met z_5 (fig. 1) of z_2 met z_4 (fig. 2).

Beschouwen wij nu verder de beide diagonalen x_1x_3 en x_1x_{n-1}

[1]) E. Weyr, l. c. p. 18.

(daar men in eens geval ieder willekeurig hoekpunt van eenzelfden n-hoek x_1 kan noemen, zonder daardoor gevaar te loopen in een anderen veelhoek te komen, stellen deze lijnen alle mogelijke diagonalen van alle mogelijke veelhoeken voor, die — de diagonalen nl. — telkens één hoekpunt overspringen). Bij ieder willekeurig punt x_1 van k_2 behooren nu twee punten x_3 en x_{n-1}, zoodat de punten x_1, x_3, x_{n-1}, op zich zelf beschouwd, ook weer een symmetrisch puntenstelsel van den 2^{en} graad op k_2 bepalen, met een zekere kegelsnee k_2'' tot sichtkromme, die wordt aangeraakt door alle verbindingslijnen x_1x_3, x_1x_{n-1}, en dus eveneens deel uitmaakt van de involutiekromme i_{n-1}.

De raakpunten op k_2 van de gemeenschappelijke raaklijnen van k_2 en k_2'' zijn die dubbelpunten van I^1_n, in welke twee punten x_1 en x_3 eener zelfde groep samenvallen, *en nu is gemakkelijk in te zien, dat deze niets anders zijn dan de reeds herhaaldelijk beschouwde tweede snijpunten met k_2 van de raaklijnen in v_1 . . . . v_4 aan k'_2.*

Het moet toch mogelijk zijn die punten van k_2, waarin x_1 en x_3 samenvallen, ook te vinden met behulp van de kegelsnee k'_2, door nl. van uit x_1 aan k'_2 een raaklijn x_1x_2, en dan van uit x_2 de raaklijn x_2x_3 te trekken. Zullen nu echter x_1, x_3 samenvallen, dan moeten ook deze twee raaklijnen samenvallen, wat slechts mogelijk is, wanneer x_2 met een der punten v_1 . . . . v_4 samenvalt; hiermede is dus het bovenstaande aangetoond. Wij zullen deze vier bizondere punten ($z_{3,5}$ in fig. 1, $z_{2,4}$ in fig. 2) gemakshalve alle vier S_1 noemen.

Verder kan worden aangetoond, dat k_2'' ook weer door de vier punten v_1 . . . . v_4 heen moet gaan, en dus, wanneer k_2 en k'_2 beide cirkels zijn, zelf ook weer een cirkel is, behoorende tot den bundel, die door de beide eerste bepaald wordt. De tweede snijpunten nl. met k_2 van de raaklijnen in de snijpunten van k_2 en k_2'' aan k_2 zijn die bijzondere punten, in welke x_3 en x^{n-1} samenvallen, en van deze punten zijn er slechts vier, daar zij de dubbelpunten van de 2^e soort van een symmetrisch elemententenstelsel van den 2^{en} graad vormen, en ook van de bij deze punten behoorende punten x_1 zijn er slechts vier, omdat deze laatste de vertakkingspunten van dat stelsel zijn. Nu is het echter dadelijk in te zien dat ook de punten v_1 . . . . v_4, als punten x_1 opgevat, aanleiding geven tot twee coïncideerende

punten x_3, x_{n-1}. De raaklijnen in deze punten aan k'_2 snijden nl. k_2 voor de tweede maal in de vier punten S_1, die dus twee samenvallende punten x_2, x_n voorstellen, en de tweede raaklijnen van uit deze punten aan k'_2 zullen dus k_2 voor de tweede maal snijden in vier punten S_2, waarvan elk twee samenvallende punten x_3, x_{n-1} voorstelt. En aangezien er nu volgens het bovenstaande niet meer dan vier zulke bizondere punten x_1 mogelijk zijn, moeten de snijpunten van k_2 en k''_2 samenvallen met de punten v_1 . . . . v_4.

Dus gaat k_2'' door de punten v_1 . . . . v_4 en heeft ze met k_2 vier raaklijnen gemeen, die deze kromme aanraken in de vier punten S_1, terwijl haar eigen raaklijnen in v_1 . . . . v_4 door de vier punten S_2 heengaan.

Men zou nu kunnen meenen dat de nu volgende kegelsnee k_2''', de omhullende van alle diagonalen die *twee* hoekpunten overspringen (x_1x_4, x_1x_{n-2}), en die eveneens door v_1 . . . . v_4 moet gaan, met k_2 vier raaklijnen gemeen had, die deze kromme zouden aanraken in de vier punten S_2, terwijl haar eigen raaklijnen in v_1 . . . . v_4 k_2 voor de tweede maal zouden ontmoeten in de vier punten S_3. Het laatste is ook juist; daarentegen zijn de punten S_2 niet de raakpunten van de gemeenschappelijke raaklijnen van k_2 en k_2'''; in een punt S_2 nl. vallen samen twee punten x_3 en x_{n-1}, en tusschen deze liggen 3 andere hoekpunten, nl. x_2, x_1, x_n; valt echter een punt x_4 met x_1 samen, dan liggen tusschen deze twee slechts twee punten, x_3 en x_2, zoodat deze beide puntengroepen niet van dezelfde soort zijn. Eerst de volgende kegelsnee k_2'''' zal met k_2 raaklijnen gemeen hebben, die in de punten S_2 aanraken; de raakpunten van de gemeenschappelijke raaklijnen van k_2 en k_2''' zal men vinden door van uit de vier raakpunten T_1 der gemeenschappelijke raaklijnen van k_2 en k'_2 ($y_{3,4}$ van fig. 1) de tweede raaklijnen aan k'_2 te trekken en deze in de vier punten T_2 voor de tweede maal met k_2 te snijden. Liggen nl. in T_1 twee punten x_2, x_3 vereenigd, dan liggen in T_2 twee punten x_1, x_4 vereenigd, zooals het moet zijn. En toch zijn, wanneer n een oneven getal is, de vier reeksen van punten T_1, T_2, ... die men op deze wijze kan verkrijgen, niet verschillend van de vier reeksen der punten S; alleen is T_1 niet identisch met S_1, maar met $S_{\frac{n-1}{2}}$, in welk punt de beide punten $x_{\frac{n+1}{2}}$, $x_{\frac{n+3}{2}}$ (en dus evenals x_1, x_2 twee opvolgende punten) samenvallen, terwijl

evenzoo T_2, in welk punt x_1, x_4 samenvallen, identisch is met $S_{\frac{n-3}{2}}$ enz.

Samenvattend kunnen wij dus zeggen: *Is n oneven, dan rangschikken zich de* $2(n-1)$ *dubbelpunten van* I^1_n *in vier reeksen van telkens* $\frac{n-1}{2}$ *punten*, S_1, S_2, S_3 .... $S_{\frac{n-1}{2}}$, *die men verkrijgt door uit de vier punten* v_1 .... v_4 *de raaklijnen te trekken aan* k'_2, *deze voor de tweede maal te snijden met* k_2, *van uit de snijpunten weer de raaklijnen te trekken aan* k'_2, *enz. De involutiekromme* i_{n-1} *bestaat uit* $\frac{n-1}{2}$ *kegelsneden*, k_2', k_2'', k_2''' ....; *de eerste wordt aangeraakt door de zijden van al de* n *hoeken, iedere volgende door al de diagonalen van éénzelfde soort (die alle hetzelfde aantal hoekpunten overspringen). De raaklijnen in de vier punten* v_1 .... v_4 *aan deze kegelsneden gaan achtereenvolgens door de 4 groepen van punten* S_1, S_2.... $S_{\frac{n-1}{2}}$, *en wel zoodanig, dat bijv. de raaklijnen in* v_1 *alle door die reeks gaan, die uit het punt* v_1 *is ontstaan. De raakpunten van de raaklijnen, die al deze kegelsneden met* k_2 *gemeen hebben, worden gevormd door dezelfde vier stelsels van punten* S, *maar nu zoodanig, dat bij* k_2' *de vier punten* $S_{\frac{n-1}{2}}$, *bij* k_2'' *de punten* S_1, *bij* k_2''' *de punten* $S_{\frac{n-3}{2}}$, *bij* k_2'''' *de punten* S_2 *behooren, enz.*

Is n een even getal, dan verkrijgt men eenigszins andere resultaten; wij zullen, om niet al te uitvoerig te worden, deze eenvoudig mededeelen, zonder bewijs. Daar $n-1$ nu niet door 2 deelbaar is, kan de involutiekromme i_{n-1} nu niet uitsluitend uit kegelsneden bestaan; inderdaad is er nu ook onder de symmetrische puntenstelsels op k_2 één, dat niet van den 2en, maar slechts van den eersten graad is, en dus een gewone kwadratische involutie vormt, nl. het puntenstelsel $x_1 x_{\frac{n+2}{2}}$, dat gevormd wordt door de hoofddiagonalen der n-hoeken; al deze hoofddiagonalen gaan dus door een vast punt P. Het overblijvend gedeelte van i_{n-1} bestaat nu uit $\frac{n}{2}-1$ kegelsneden, die weer alle door v_1 .... v_4 heengaan en soort-

gelijke eigenschappen bezitten als boven. Maar de puntenstelsels S en T zijn hier niet meer identisch; in plaats van vier gebroken lijnen, die uitgaan van de punten $v_1 \ldots . v_4$ en uitmonden in de vier punten T_1, verkrijgt men hier twee zulke lijnen tusschen telkens twee der vier punten $v_1 \ldots . v_4$, en deze bevatten de punten S, en twee andere tusschen telkens twee der vier punten T_1, en deze bevatten de punten T. Daarbij is het aantal der punten S in het geheel $= 2 . \left(\frac{n}{2} - 1\right)$, en dat der punten $T = 2 . \frac{n}{2}$, en dus der punten S en T samen $= 2 \left(\frac{n}{2} - 1\right) + 2 . \frac{n}{2} = 2 (n - 1) =$ het volledig aantal dubbelpunten der involutie I^1_n.

De raakpunten der raaklijnen van uit P aan k_2 behooren nu eens tot het stelsel der punten S, dan weer tot dat der punten T; voor $\frac{n}{2}$ even tot dat der punten S, voor $\frac{n}{2}$ oneven tot dat der punten T; het is in ieder bizonder geval gemakkelijk deze raakpunten, en dus ook P, a priori te construeeren. De raakpunten der gemeenschappelijke raaklijnen van k_2 met k'_2, k_2'', ... zijn weer achtereenvolgens de punten T_1, S_1, T_2, S_2 ....

Eindelijk moet nog worden opgemerkt dat men, in plaats van onze figuur op te vatten als een n-hoek in k_2 beschreven, haar eveneens kan beschouwen als een n-zijde om k'_2 beschreven; de hoekpunten doorloopen dan de kegelsnee k_2, en alle diagonaalpunten van dezelfde soort zullen eveneens kegelsneden doorloopen, die alle behooren tot de schaar (k_2, k'_2), maar die niet, zooals in het eerste geval, cirkels worden, wanneer k_2 en k'_2 cirkels zijn.

§ 6. In deel LXXXVIII van de *Sitzungsberichte der k. Akad. d. Wissensch. in Wien*, p. 424, heeft G. Kohn aangetoond, dat er een zeer eenvoudig verband bestaat tusschen de theorie der harmonische middelpunten, zooals die door Cremona ontwikkeld is in zijne *Introduzione*, en tusschen de theorie der involuties van hoogeren graad en hoogeren rang, die men vindt in Emil Weyr's meergenoemde *Beiträge*. Schrijver stelt a priori voor de harmonische middelpunten een definitie op, ontleend aan de

theorie der involuties, en bewijst dan langs meetkundigen weg, dat de eigenschappen der zoo gedefinieerde puntenstelsels inderdaad samenvallen met die der harmonische middelpunten; daarentegen wordt het rechtstreeksche bewijs voor de gelijkwaardigheid der beide definities op analytische wijze gevoerd. Wij zullen nu in deze § in het kort aantoonen, dat ook langs synthetischen weg het verband tusschen de beide genoemde theoriëen zeer gemakkelijk kan worden gevonden.

Wanneer in een plat vlak α een kromme c^n van den n^{den} graad en een pool P gegeven zijn, dan kan men op de volgende wijze de eerste poolkromme p^{n-1} van P ten opzichte van c^n construeeren [1].

Men trekke door P een willekeurige rechte, die niet in het vlak α ligt en neme daarop twee willekeurige punten T_1, T_2 aan, en van uit deze punten projecteere men de kromme c^n. Dan ontstaan twee kegels van den n^{den} graad, die een bundel van oppervlakken van den n^{den} graad bepalen. Door ieder willekeurig punt der ruimte gaat in het algemeen één oppervlak uit dien bundel; brengt men het willekeurige punt in het vlak α, dan zal het door dit punt bepaalde oppervlak ontaarden in het vlak α zelf en een oppervlak ϕ^{n-1} van den graad $n-1$. Immers iedere lijn door dit punt in het vlak α moet van het gezochte oppervlak bevatten in de eerste plaats dit punt zelf en dan de n punten, volgens welke zij de kromme c^n snijdt, dus in het geheel $n+1$, en dus oneindig vele punten .... Door de lijn PT_1T_2 kan men een zeker aantal vlakken aanbrengen, die beide kegels tegelijkertijd aanraken, en wier doorgangen met het vlak α dus de raaklijnen zijn van uit P aan c^n; en aangezien de raakpunten dezer raaklijnen op beide kegels tegelijk liggen, moeten zij ook op ϕ^{n-1} liggen, en dus ook op de kromme p^{n-1}, volgens welke ϕ^{n-1} het vlak α snijdt. De raakpunten der raaklijnen van uit P aan c^n getrokken, moeten dus liggen op een zekere kromme p^{n-1}, de eerste poolkromme van P; het aantal dezer raaklijnen bedraagt dus $n(n-1)$. Een willekeurige rechte g door P in α snijdt nu c^n in n punten $A_1, A_2, \ldots A_n$, p^{n-1} in $n-1$ punten A'_1, A'_2, ... A'_{n-1}, en deze laatste zijn volgens Cremona de harmonische middelpunten van den graad $n-1$ van P ten opzichte van A_1 .... A_n.

[1] Cf. C. Rodenberg, *Math. Ann.* 26. p. 557.

Brengen wij door g en de lijn T_1T_2 een vlak β aan, dan zal dit de beide kegels snijden volgens twee n-stralige bundels $(T_1 . A_1, A_2, \dots . A_n)$, $(T_2 . A_1, A_2, \dots . A_n)$, en ϕ^{n-1} volgens een kromme c^{n-1}, die de lijn g snijdt in de punten $A'_1, A'_2, \dots . A'_{n-1}$, en verder door de niet op g gelegen snijpunten der zooeven genoemde stralenstelsels heengaat.

Wij vatten nu de punten T_1 en T_2 op als de dragers van twee projectieve straleninvoluties van den n^{den} graad en den 1^{en} rang en nemen aan, dat voor beide de gemeenschappelijke straal een n-voudige straal is, en dat de bovengenoemde stralenstelsels $(T_1 . A_1 \dots . A_n)$, $(T_2 . A_1 \dots . A_n)$ twee groepen voorstellen. Hierdoor zijn de beide involuties bepaald; zij hebben dit bizondere, dat zij de lijn g snijden volgens één en dezelfde puntinvolutie I^1_n, want de beide puntinvoluties, die zij ieder afzonderlijk op g uitsnijden, hebben gemeen het n-voudige punt P en de groep $A_1 \dots . A_n$, en zijn dus identisch. Om de beide straleninvoluties onderling projectief te maken is het dus het eenvoudigst, zulke stralengroepen aan elkaar toe te voegen, die door één en dezelfde groep der puntinvolutie op g heen gaan. Nu moeten deze beide straleninvoluties een vlakke kromme c^{2n} voortbrengen, die in T_1 en T_2 een n-voudig punt heeft; van deze kromme zondert zich echter de lijn T_1T_2 n-maal af, omdat deze lijn voor beide bundels een n-voudige straal is en aan zich zelf is toegevoegd, en bovendien zondert zich de lijn g af; er blijft dus over een kromme van den graad $n - 1$, en deze kan niets anders zijn dan de zooeven genoemde kromme c^{n-1}, aangezien deze door de beide groepen $(T_1 . A_1 \dots . A_n)$, $(T_2 . A_1 \dots . A_n)$ reeds meer dan volkomen bepaald is. Op de kromme c^{n-1} liggen dus de snijpunten van de stralen van *alle* aan elkaar toegevoegde groepen der beide projectieve straleninvoluties, of anders uitgedrukt: wanneer wij van twee tot eenzelfde groep behoorende punten der involutie I^1_n op g het eene met T_1 en het andere met T_2 verbinden, dan snijden deze stralen elkaar in een punt van c^{n-1}; en wanneer wij omgekeerd een willekeurig punt van c^{n-1} met T_1 en T_2 verbinden, dan snijden deze stralen de lijn g in twee punten eener zelfde groep van I^1_n. Hieruit volgt dan echter onmiddellijk, dat de snijpunten $A'_1, A'_2 \dots . A'_{n-1}$ van c^{n-1} met g, en dus de harmonische middelpunten van den graad $n - 1$ van P ten opzichte van het puntenstelsel $A_1 \dots . A_n$, dubbelpunten zijn

van de involutie I^1_n op g, waarmede dus de volgende stelling bewezen is:

De harmonische middelpunten van den graad $n - 1$ *van* P *ten opzichte van het puntenstelsel* $A_1 \ldots . A_n$, *zijn de dubbelpunten der involutie* I^1_n *op* g, *die bepaald is door de groep* $A_1 \ldots . A_n$ *en het punt* P *als* n*-voudig punt beschouwd.*

Wel is waar vinden wij op deze wijze slechts $n - 1$ dubbelpunten, terwijl hun aantal $2(n - 1)$ bedraagt; maar een n-voudig punt absorbeert juist $n - 1$ dubbelpunten, zoodat de ontbrekende in P vereenigd liggen.

§ 7. De in de vorige paragraaf bestudeerde figuur levert ons nu ook het eenvoudige middel de harmonische middelpunten van alle volgende graden te construeeren. Beschouwen wij n.l. nu de punten $A'_1 \ldots . A'_{n-1}$ als fundamentaalpunten, en verbinden wij deze met T_1 en T_2, dan zal door de niet op g liggende snijpunten dezer beide $n - 1$ stralige stelsels een vlakke kromme c^{n-2} volkomen bepaald zijn, en de snijpunten A''_1, $A''_2 \ldots . A''_{n-2}$ dezer kromme met g zullen de harmonische middelpunten van den eersten rang van P ten opzichte van het stelsel $A'_1 \ldots . A'_{n-1}$, en dus van den tweeden rang, of van den graad $n - 2$, ten opzichte van $A_1 \ldots . A_n$ zijn. Het is duidelijk, dat men op deze wijze door kan gaan tot aan het harmonische middelpunt van den eersten graad, het „Centre des moyennes harmoniques" van Poncelet toe.

Beschouwen wij nu nog eens de punten $A''_1, \ldots . A''_{n-2}$, de harmonische middelpunten van den graad $n - 2$. Volgens de stelling der voorgaande paragraaf zijn deze punten $n - 2$ van de $2(n - 2)$ dubbelpunten eener involutie I^1_{n-1} op g, die bepaald is door het $n - 1$ voudige punt P, en de groep A'_1, $A'_2 \ldots . A'_{n-1}$, terwijl de overige $n - 2$ dubbelpunten met P samenvallen

Nu bezit echter deze involutie I^1_{n-1} ∞^1 zulke groepen $A'_1 \ldots . A'_{n-1}$, die alle op uiterst eenvoudige wijze met behulp van de kromme c^{n-2} geconstrueerd kunnen worden, zooals uit het voorgaande onmiddellijk is af te leiden, en die alle de eigenschap bezitten dat zij, als fundamentaalpunten opgevat, ten opzichte van de pool P dezelfde harmonische middelpunten $A''_1 \ldots . A''_{n-2}$ van den graad $n - 2$ bezitten. Onder al deze groepen is één zeer bizondere, n.l. diegene voor welke

alle $n - 1$ punten met het punt P samenvallen; in dit geval worden, zooals uit de theorie der harmonische middelpunten bekend is, de harmonische middelpunten van den graad $n - 2$ onbepaald, zoodat wij aan mogen nemen dat zij met $A''_1 \ldots . A''_{n-2}$ samenvallen.

Iedere groep $A'_1 \ldots . A'_{n-1}$ echter bestaat nu weer uit de niet met P samenvallende dubbelpunten eener involutie I^1_n van groepen $A_1 \ldots . A_n$, en elk van deze involuties bezit ook weer ∞^1 $n =$ puntige groepen; er zijn dus in het geheel ∞^2 $n =$ puntige groepen $A_1 \ldots . A_n$, die alle ten opzichte van de pool P dezelfde harmonische middelpunten van den graad $n - 2$ bezitten. En aangezien men, wanneer de pool en deze laatste punten gegeven zijn, twee fundamentaalpunten willekeurig moet aannemen om een geheele groep van n punten te bepalen, vormen de ∞^2 groepen $A_1 \ldots . A_n$ een involutie I^2_n van den graad n en den tweeden rang.

Onder deze ∞^2 groepen $A_1 \ldots . A_n$ komen ook diegene voor, en wel ten getale van ∞^1, die worden afgeleid uit het $n - 1$ voudige punt P; nu is het echter bekend, dat wanneer de $n - 1$ harmonische middelpunten van den graad $n - 1$ met de pool samenvallen, ook $n - 1$ fundamentaalpunten met de pool samenvallen, terwijl het laatste onbepaald wordt, en dus naar willekeur gekozen kan worden. In onze involutie I^2_n vormt dus het punt P, als $n - 1$ voudig punt opgevat, met ieder willekeurig punt van g een volledige groep van n punten; men kan dit punt dus tevens als een n-voudig punt opvatten, daar men het willekeurige fundamentaalpunt ook met P zelf kan laten samenvallen.

Eindelijk is nog te bedenken, dat ieder punt A'' een dubbelpunt is eener involutie I^1_{n-1}, waarvan de punten A' enkelvoudige punten zijn, zoodat dus ieder punt A'' voor twee punten A' geldt. Maar ieder punt A' is zelf een dubbelpunt eener involutie I^1_n, en geldt dus voor twee punten A, zoodat ten slotte ieder punt A'' een combinatie voorstelt van twee dubbelpunten der involutie I^2_n en dus een drievoudig punt van I^2_n is.

Vatten wij alles samen, dan vinden wij dus:

De harmonische middelpunten van den graad $n - 2$ van de pool P *ten opzichte van een stelsel van fundamentaalpunten* $A_1 \ldots . A_n$ *zijn de niet met* P *samenvallende drievoudige*

punten van een zekere involutie I^2_n, *waarin de punten* $A_1 \ldots A_n$ *een groep vormen, terwijl de pool* P, *als* $n-1$ *voudig punt opgevat, met ieder willekeurig punt van* g, *en dus ook met zich zelf, eveneens een groep vormt.*

Door nu op deze wijze door te gaan vindt men natuurlijk gemakkelijk dat de harmonische middelpunten van den graad $n-k$ de niet met P samenvallende $(k+1)$ voudige punten eener I^k_n zijn, voor welke de punten $A_1 \ldots . A_n$ een groep vormen, terwijl het punt P, als $(n-k+1)$ voudig punt opgevat, met $k-1$ willekeurige punten van g een groep vormt, en dit is de door Schrijver op p. 426 van zijn mededeeling vooropgestelde definitie.

DE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VOOR DE BEWEGING VAN EEN VAST LICHAAM,

DOOR

G. SCHOUTEN.
(Delft.)

Om de beweging van een stelsel lichamen te onderzoeken, waarbij de verbindingen van dien aard zijn, dat de reactiekrachten bij een virtueele verplaatsing geen arbeid verrichten, is de weg, door LAGRANGE aangewezen, zeker de meest geschikte.

Evenwel heeft Dr. D. J. KORTEWEG in zijn verhandeling *Über eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problemes der rollenden Bewegung* aangetoond, hoe zelfs bij de toepassing van die Methode op het betrekkelijk eenvoudige geval van de rollende beweging van een omwentelingslichaam over een plat vlak, door verschillende schrijvers fouten begaan zijn, die wel is waar in 't vervolg niet meer zullen voorkomen, dank zij Dr. KORTEWEG's duidelijke aanwijzing van de juiste oplossing, maar die dan toch het bewijs leveren, dat de toepassing van LAGRANGE's Methode met omzichtigheid gepaard moet gaan.

Naast deze oplossing staat, althans waar het de beweging van een vast lichaam geldt, een andere, waarbij onderzocht wordt: 1°. de beweging *van* het zwaartepunt, 2°. de beweging *om* het zwaartepunt, dit daarbij als vast punt gedacht.

Bij het eerste onderzoek past men de stelling van de beweging van het zwaartepunt toe, bij het tweede de formules van EULER of die van LAGRANGE.

Omdat mij gebleken is, dat de laatste formules af te leiden zijn langs elementairen weg, d. w. z. door toepassing van de beginselen der Kinematica en van het theorema van D'ALEM-

BERT, dat trouwens den grondslag vormen zal voor de studie van elk stelsel lichamen, geef ik hier die afleiding, niet omdat er eenige bijzondere verdienste in die afleiding zou steken, maar alleen met het oog op de Methodologie. Met behulp van deze formules kan men de beweging van een vast lichaam bepalen langs gemakkelijkeren weg dan met behulp van de EULER'sche vergelijkingen en zonder kennis genomen te hebben van de Methode van LAGRANGE voor de behandeling van Stelsels van Lichamen.

Wij beginnen met de afleiding van de vergelijkingen voor de beweging van een vast lichaam om een vast punt.

De Kinematica leert omtrent deze beweging, dat ze ieder oogenblik bestaat in een wentelen om een as, welke door dit vaste punt gaat.

Wij ontbinden de hoeksnelheid, waarmede die wenteling op zeker oogenblik geschiedt, volgens drie onderling rechthoekige assen OP, OQ, OR, die met het lichaam vast verbonden zijn, terwijl de oorsprong O in het vaste punt is genomen. Laten p, q, r die ontbondenen zijn.

In de Kinematica wordt dan verder geleerd, dat de volgens deze assen vallende ontbondenen x', y', z' van de snelheid van een punt des lichaams, dat de massa m en de coördinaten x, y, z heeft, gegeven worden door

$$x' = \begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix} \; ; \quad y' = \begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix} \; ; \quad z' = \begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix} \; ;$$

zoodat de ontbondenen x'', y'', z'' van de versnelling van dat punt zullen gegeven worden door

$$x'' = \begin{vmatrix} q' & r' \\ y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & r \\ y' & z' \end{vmatrix} ; \quad y'' = \begin{vmatrix} r' & p' \\ z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & p \\ z' & x' \end{vmatrix} ; \quad z'' = \begin{vmatrix} p' & q' \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ x' & y' \end{vmatrix} .$$

Hieruit volgt:

1°. $\Sigma m x'' = \mathrm{M} \left\{ \begin{vmatrix} q' & r' \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & r \\ y'_0 & z'_0 \end{vmatrix} \right\}$

= de geheele massa M van het lichaam, vermenigvuldigd met de versnelling in de richting OP van het zwaartepunt $(x_0 y_0 z_0)$ van het lichaam. Overeenkomstige uitdrukkingen vindt men voor $\Sigma m y''$ en $\Sigma m z''$.

2°. $\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) =$

$$= \Sigma m \left\{ \begin{vmatrix} pq \\ xy \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} qr \\ yz \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} rp \\ zx \end{vmatrix}^2 \right\}$$

$$= \Sigma m \{ p^2(y^2 + z^2) + q^2(z^2 + x^2) + r^2(x^2 + y^2) - 2pqxy - 2qryz - 2rpzx \}$$

$$= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2pq\Sigma mxy - 2qr\Sigma myz - 2rp\Sigma mzx\,;$$

waar A het traagheidsmoment van het lichaam ten opzichte van de as OP, B dat ten opzichte van de as OQ en C dat ten opzichte van de as OR voorstellen.

Worden de assen OP, OQ, OR volgens de hoofdassen van traagheid gekozen, dan is

$$2T = \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Volgens het theorema van D'ALEMBERT zijn de beweegkrachten ieder oogenblik aequivalent met de krachten mx'', my'', mz'', die men voor ieder punt van het lichaam kan opmaken.

Noemen we dan L_p het moment van de beweegkrachten ten opzichte van de as OP, L_q dat ten opzichte van OQ en eindelijk L_r dat ten opzichte van OR, dan is

$$L_p = \Sigma m(yz'' - zy'')$$

$$= \Sigma m \left\{ y \begin{vmatrix} p'q' \\ x\,y \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} p\,q \\ x'y' \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} r'p' \\ z\,x \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} r\,p \\ z'x' \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \Sigma m \{ p'(y^2 + z^2) - q'xy - r'xz + p(yy' + zz') - (qy + rz)(qz - ry) \}$$

$$= Ap' - q'\Sigma mxy - r'\Sigma mxz + \Sigma m \left\{ py \begin{vmatrix} rp \\ zx \end{vmatrix} + pz \begin{vmatrix} pq \\ xy \end{vmatrix} - (qy + rz) \begin{vmatrix} qr \\ yz \end{vmatrix} \right\}$$

$$= Ap' - q'\Sigma mxy - r'\Sigma mxz + pr\Sigma mxy - pq\Sigma mxz +$$
$$+ (r^2 - q^2)\,\Sigma myz + (C - B)\,qr.$$

Dergelijke uitdrukkingen vindt men voor L_q en L_r.

In de onderstelling, dat OP, OQ, OR de hoofdassen van traagheid van het punt O zijn, gaan deze uitdrukkingen over in

$$Ap' - (B - C)\,qr = L_p$$
$$Bq' - (C - A)\,rp = L_q$$
$$Cr' - (A - B)\,pq = L_r$$

zijnde de bewegingsvergelijkingen van EULER.

Worden deze geintegreerd, wat niet mogelijk is tenzij L_p, L_q, L_r in functiën van p, q, r en t worden uitgedrukt, dan zullen deze integraalvergelijkingen p, q, r als functiën van den tijd leeren kennen.

De stand van het lichaam wordt daarna bepaald door het berekenen van de hoeken θ, ψ en ϕ, die den stand van het beweeglijk assenstelsel OP, OQ, OR bepalen ten opzichte van een vast assenstelsel OX, OY, OZ. Het zijn de hoeken, die het stelsel OXYZ achtereenvolgens moet draaien, om met OPQR tot samenvalling gebracht te worden. Eerstens een hoek ψ om de as OZ, waardoor OX gebracht wordt in de doorsnede OΘ van het vlak OXY en OPQ, daarna een hoek ϕ om OR, waardoor OX op OP komt te liggen; eindelijk een hoek θ om OΘ, waardoor OZ op OR komt.

De ontbondenen p, q, r van de hoeksnelheid worden dan vervangen door de ontbondenen $\dot\psi$ volgens OZ, $\dot\phi$ volgens OR en $\dot\theta$ volgens OΘ, en bepaald door de volgende formules:

$$p = \sin\theta\sin\phi \,.\, \dot\psi + \cos\phi \,.\, \dot\theta$$

$$q = \sin\theta\cos\phi \,.\, \dot\psi - \sin\phi \,.\, \dot\theta$$

$$r = \cos\theta \,.\, \dot\psi + \dot\phi .$$

Worden deze geintegreerd, nadat p, q, r vervangen zijn door de bovengenoemde functiën van t, dan zullen deze integraalvergelijkingen θ, ϕ en ψ als functiën van den tijd leeren kennen en daarmede den stand van het lichaam op ieder oogenblik van de beweging.

Aangezien nu L_p, L_q, L_r in 't algemeen niet in p, q, r en t kunnen uitgedrukt worden, ligt het voor de hand, de bewegingsvergelijkingen van Euler zóó te herleiden, dat daarin p, q, r vervangen zijn door $\dot\theta$, $\dot\phi$ en $\dot\psi$.

Dit kan op de volgende wijze geschieden.

Zooals gezegd is, moet de hoeksnelheid, tot nu toe ontbonden volgens de beweeglijke assen, ontbonden worden in $\dot\theta$ volgens OΘ, $\dot\psi$ volgens OZ en $\dot\phi$ volgens OR.

De momenten $L_{\dot\theta}$, $L_{\dot\psi}$ en $L_{\dot\phi}$ ten opzichte van die assen worden gegeven door

$$L_{\dot\psi} = L_p \sin\theta \sin\phi + L_q \sin\theta \cos\phi + L_r \cos\theta$$
$$L_{\dot\theta} = L_p \cos\phi - L_q \sin\phi$$
$$L_{\dot\phi} = L_r.$$

De bewegingsvergelijkingen van **Euler** gaan hierdoor over in

$$L_{\dot\psi} = \sin\theta \sin\phi\,(Ap' - (B - C)qr) + \sin\theta\cos\phi\,(Bq' - (C - A)rp) + \\ + \cos\theta\,(Cr' - (A - B)pq)$$
$$L_{\dot\theta} = \cos\phi\,(Ap' - (B - C)qr) - \sin\phi\,(Bq' - (C - A)rp)$$
$$L_{\dot\phi} = Cr' - (A - B)pq.$$

Wij herleiden deze als volgt:

$$L_{\dot\psi} = (Ap' \sin\theta\sin\phi + Bq' \sin\theta\cos\phi + Cr'\cos\theta) + \\ + Ap(r\sin\theta\cos\phi - q\cos\theta) + Bq(p\cos\theta - r\sin\theta\sin\phi) + \\ + Cr(q\sin\theta\sin\phi - p\sin\theta\cos\phi)$$
$$= \frac{d}{dt}(Ap\sin\theta\sin\phi + Bq\sin\theta\cos\phi + Cr\cos\theta) - \\ - Ap(\sin\phi\cos\theta\,.\,\dot\theta + \cos\phi\sin\theta\,.\,\dot\phi) - Bq(\cos\phi\cos\theta\,.\,\dot\theta - \\ - \sin\phi\sin\theta\,.\,\dot\phi) + Cr\sin\theta\,.\,\dot\theta + Ap(r\sin\theta\cos\phi - q\cos\theta) + \\ + Bq(p\cos\theta - r\sin\theta\sin\phi) + Cr(q\sin\theta\sin\phi - p\sin\theta\cos\phi)$$
$$= \frac{d}{dt}(Ap\sin\theta\sin\phi + Bq\sin\theta\cos\phi + Cr\cos\theta)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\dot\psi} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial\dot\psi} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\dot\psi}\right)$$
$$= \frac{d\dfrac{\partial T}{\partial\dot\psi}}{dt}.$$

$$L_{\dot\theta} = \frac{d}{dt}(Ap\cos\phi - Bq\sin\phi) + Ap\sin\phi\,.\,\dot\phi + Bq\cos\phi\,.\,\dot\phi - \\ - (B - C)qr\cos\phi + (C - A)rp\sin\phi$$
$$= \frac{d}{dt}(Ap\cos\phi - Bq\sin\phi) + Ap(\sin\phi\,.\,\dot\phi - r\sin\phi) + \\ + Bq(\cos\phi\,.\,\dot\phi - r\cos\phi) + Cr(p\sin\phi + q\cos\phi)$$

$$= \frac{d}{dt}(Ap \cos\phi - Bq \sin\phi) - Ap \sin\phi \cos\theta \,.\, \dot\psi -$$

$$- Bq \cos\phi \cos\theta \,.\, \dot\psi + Cr \sin\theta \,.\, \dot\psi$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \dot\theta} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \dot\theta}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{d\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \theta}.$$

$$L_{\dot\phi} = \frac{d}{dt} Cr - (Ap \,.\, q - Bq \,.\, p) =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} - \left(\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \phi}\right)$$

$$= \frac{d\frac{\partial T}{\partial \dot\phi}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \phi},$$

waardoor de vergelijkingen van Euler gebracht zijn onder den vorm, dien Lagrange aan de bewegingsvergelijkiogen gegeven heeft.

Worden deze vergelijkingen geintegreerd, en daartoe is noodig dat $L_{\dot\psi}$, $L_{\dot\phi}$ en $L_{\dot\theta}$ in ψ, ϕ en θ kunnen uitgedrukt worden, dan vindt men drie integraalvergelijkingen tusschen $\dot\psi$, $\dot\theta$, $\dot\phi$, die, nogmaals geintegreerd, θ, ϕ en ψ als functiën van den tijd leeren kennen.

Nu kunnen $L_{\dot\psi}$, $L_{\dot\phi}$ en $L_{\dot\theta}$ altijd in ψ, ϕ en θ uitgedrukt worden. Aangezien toch $L_{\dot\theta}$ het moment voorstelt van de beweegkrachten ten opzichte van de as $O\Theta$, en $X\frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + Y\frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + Z\frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta$ den arbeid voorstelt, dien een kracht, welks ontbondenen volgens de vaste assen X, Y en Z zijn en die aangrijpt in het punt x, y, z, verricht, zal $X\frac{\partial x}{\partial \theta} + Y\frac{\partial y}{\partial \theta} + Z\frac{\partial z}{\partial \theta}$ den arbeid van die kracht voorstellen, berekend voor de eenheid van wenteling, en deze arbeid is juist gelijk aan het

moment van de kracht ten opzichte van de as $O\Theta$. Bijgevolg kunnen $L_{\dot\theta}$, $L_{\dot\psi}$ en $L_{\dot\phi}$ berekend worden volgens de uitdrukkingen

$$L_{\dot\theta} = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\theta} + Y\frac{\partial y}{\partial\theta} + Z\frac{\partial z}{\partial\theta}\right),$$

$$L_{\dot\psi} = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\psi} + Y\frac{\partial y}{\partial\psi} + Z\frac{\partial z}{\partial\psi}\right),$$

$$L_{\dot\phi} = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\phi} + Y\frac{\partial y}{\partial\phi} + Z\frac{\partial z}{\partial\phi}\right);$$

waarin x, y, z, de coordinaten van het aangrijpingspunt van een beweegkracht, ten gevolge van de bekende transformatieformules in functien van θ, ϕ en ψ kunnen uitgedrukt worden.

Onderzoeken we nu het geval, dat het bewegend lichaam geen vastpunt heeft.

Wij kiezen de hoofdassen van traagheid van een willekeurig punt O van het lichaam tot assen van het beweeglijk assenstelsel OPQR en bepalen den stand van dit ten opzichte van een vast assenstelsel door de hoeken θ, ϕ en ψ.

Zijn dan u, v, w de ontbondenen van de snelheid van het punt O, genomen volgens de beweeglijke assen, dan zijn die van een punt met de massa m en de coordinaten x, y, z op de beweeglijke assen:

$$x' = u + \begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix}, \quad y' = v + \begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix}, \quad z' = w + \begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix},$$

waaruit volgt:

$$\Sigma m x'' = \Sigma m \left\{ u' + \begin{vmatrix} q' & r' \\ y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & r \\ y' & z' \end{vmatrix} \right\} = Mu' + Mx''_0$$

als M de massa van 't lichaam en x_0, y_0, z_0, de coordinaten van het zwaartepunt op het beweeglijk assenstelsel voorstellen.

Volgens de stelling van D'ALEMBERT is $\Sigma m x'' = \Sigma X$, zoodat

$$Mu' + Mx_0'' = \Sigma X$$

Evenzoo is

$$Mv' + My_0'' = \Sigma Y$$

$$Mw' + Mz_0'' = \Sigma Z.$$

Verder is, insgelijks volgens de stelling van D'ALEMBERT,

$$L_p = \Sigma m\,(yz'' - zy'')$$

$$= \Sigma m \left\{ y\left(w' + \begin{vmatrix} p'q' \\ x\,y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p\,q \\ x'y' \end{vmatrix}\right) - z\left(v' + \begin{vmatrix} r'p' \\ z\,x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r\,p \\ z'x' \end{vmatrix}\right)\right\}$$

$$= M \begin{vmatrix} v'w' \\ y_0 z_0 \end{vmatrix} + Ap' - (B - C)qr.$$

Voor het geval, dat de gekozen oorsprong O van het beweeglijk assenstelsel in het zwaartepunt van het lichaam valt, gaan de gevonden betrekkingen over in

$$Mu' = \Sigma X$$
$$Mv' = \Sigma Y$$
$$Mw' = \Sigma Z$$
$$Ap' - (B - C)qr = L_p$$
$$Bq' - (C - A)rp = L_q$$
$$Cr' - (A - B)pq = L_r.$$

De eerste drie bepalen de beweging van het zwaartepunt, terwijl het laatste drietal de beweging *om* het zwaartepunt, dit als *vast* punt aannemende, leeren kennen.

Worden nu deze laatste drie vergelijkingen herleid, zooals boven is geschied, dan krijgen we het volgende stelsel vergelijkingen voor de beweging van een lichaam, waarvan het zwaartepunt ten opzichte van het vaste stelsel ξ, η, ζ tot coördinaten heeft:

$$\left.\begin{array}{l}
M\ddot{\xi} = \Sigma X\ ,\quad M\ddot{\eta} = \Sigma Y\ ,\quad M\ddot{\zeta} = \Sigma Z\ , \\[2ex]
\dfrac{d\dfrac{\partial T}{\partial \dot\theta}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = L_{\dot\theta} = \Sigma\left(X\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \theta} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right) \\[2ex]
\dfrac{d\dfrac{\partial T}{\partial \dot\psi}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial \psi} = L_{\dot\psi} = \Sigma\left(X\dfrac{\partial x}{\partial \psi} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \psi} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \psi}\right) \\[2ex]
\dfrac{d\dfrac{\partial T}{\partial \dot\phi}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial \phi} = L_{\dot\phi} = \Sigma\left(X\dfrac{\partial x}{\partial \phi} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \phi} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \phi}\right)
\end{array}\right\}\ \text{(A)}$$

en waarin T voorstelt de kinetische energie van het lichaam *om* het zwaartepunt en uitgedrukt moet wezen in θ, ϕ, en de afgeleiden $\dot\theta$, $\dot\psi$ en $\dot\phi$. In het eerste lid van de voorlaatste vergelijking van (A) is symmetrieshalve de term $-\frac{\partial T}{\partial \psi}$ gebracht, waarvan de waarde gelijk nul is, omdat p, q, r en dus ook T onafhankelijk van ψ zijn.

Wij zullen ten slotte een paar toepassingen behandelen.

Voorbeeld. Een omwentelingslichaam, steunende op een glad horizontaal vlak, beweegt zich onder de werking van zijn gewicht (zie fig. 2 bl. 137 Deel IV van Dr. KORTEWEG's opstel).

De bepaling van de beweging van het zwaartepunt wordt beheerscht door de vergelijkingen

$$M\ddot\xi = 0 \quad , \quad M\ddot\eta = 0 \quad , \quad M\ddot\zeta = R - Mg ,$$

waar R de normale druk in het steunpunt is, en ζ een functie van θ, stel $\zeta = f(\theta)$, bepaald door den vorm van het omwentelingslichaam.

De vergelijkingen voor de beweging *om* het zwaartepunt worden gegeven door het laatste drietal van (A), door voor T te nemen de waarde gegeven door

$$2T = A(\dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + C(\dot\psi\cos\theta + \dot\phi)^2 ,$$

terwijl hier $L_{\dot\psi} = 0$, $L_{\dot\phi} = 0$ en $L_{\dot\theta} = R \,.\, AD = -R \,.\, f'(\theta)$ is.

Ze zijn derhalve:

$$\frac{d\, C(\dot\psi\cos\theta + \dot\phi)}{dt} = 0$$

$$\frac{d\,\{A\dot\psi \sin^2\theta + C\cos\theta\,(\dot\psi\cos\theta + \dot\phi)\}}{dt} = 0$$

$$\frac{dA\dot\theta}{dt} - (A\dot\psi^2 \sin\theta\cos\theta - C(\dot\psi\cos\theta + \dot\phi)\sin\theta) = -R\,.\,f'(\theta).$$

De beide eersten geintegreerd geven:

$$\dot\psi\cos\theta + \dot\phi = \text{standvastig} = n \qquad (1)$$

$$A\dot\psi\sin^2\theta + Cn\cos\theta = \text{standvastig} = K. \qquad (2)$$

De eerste drukt uit, dat de wenteling om de omwentelingsas van 't lichaam eenparig is, een noodzakelijk gevolg van de omstandigheid, dat de beweegkrachten die as snijden.

De tweede leert, dat het moment van de hoeveelheid van beweging ten opzichte van de verticaal van het zwaartepunt

standvastig is, een gevolg van de omstandigheid, dat de beweegkrachten evenwijdig zijn aan die verticaal.

Vervangt men in de derde bewegingsvergelijking R door $M(g + \ddot{\xi}) = M(g + f'(\theta) f''(\theta) . \dot{\theta}^2 + f'(\theta) . \ddot{\theta})$, dan gaat ze over in

$$\{A + Mf'^2(\theta)\} \ddot{\theta} + Mf'(\theta)f''(\theta) . \dot{\theta}^2 + Mgf'(\theta) = \dot{\psi} \sin\theta (A\dot{\psi}\cos\theta - Cn).$$

Het dubbele van het eerste lid is gelijk aan

$$\frac{d\{(A + Mf'^2(\theta)\}\dot{\theta}^2 + 2Mgf(\theta)\}}{d\theta}.$$

Het dubbele van het tweede lid, als daarin $\dot{\psi}$ vervangen wordt door $\frac{K - Cn\cos\theta}{A\sin^2\theta}$, gaat over in

$$2\frac{(K - Cn\cos\theta)(K\cos\theta - Cn)}{A\sin^3\theta},$$

en is bijgevolg gelijk aan de afgeleide naar θ van den vorm

$$-\frac{(K - Cn\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} \text{ of van } - A\dot{\psi}^2\sin^2\theta.$$

De integraalvergelijking van de derde bewegingsvergelijking luidt dus

$$(A + Mf'^2(\theta))\dot{\theta}^2 + 2Mgf(\theta) + A\dot{\psi}^2\sin^2\theta = \text{standvastig} = K \quad (3)$$

zijnde de uitdrukking voor de standvastigheid van de totale energie van 't lichaam.

(3) is, als daarin $\dot{\psi}$ door haar waarde in θ wordt vervangen, een differentiaalvergelijking, die geintegreerd θ als functie van t doet kennen. Die waarde voor θ in (2) overgebracht, geeft een differentiaalvergelijking, welke geintegreerd ψ als functie van den tijd geeft; terwijl eindelijk (1) door substitutie van de θ en ψ door hunne waarden een differentiaalvergelijking geeft, die geintegreerd ϕ als functie van t doet kennen.

Voorbeeld. Een omwentelingslichaam, met een scherpen cirkelvormigen rand voorzien, rolt met dien rand over een horizontaal vlak onder de werking van zijn gewicht. Het zwaartepunt van het lichaam ligt in het middelpunt van den rand (zie dezelfde figuur).

Is R de straal van den rand en zijn X, Y, Z de ontbonde-

nen van den weerstand van het steunvlak, genomen volgens de vaste assen, dan gaan de bewegingsvergelijkingen (A) hier over in

$$M\ddot{\xi} = X \ , \quad M\ddot{\eta} = Y \ , \quad M\ddot{\zeta} = Z - Mg \ ,$$

$$\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = R(X \cos\psi + Y \sin\psi)$$

$$\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = f'(\theta)\,(X \cos\psi + Y \sin\psi)$$

$$\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = f(\theta)\,(-X \sin\psi + Y \cos\psi) - Z\,f'(\theta),$$

waar T gegeven wordt door

$$2T = A(\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})^2.$$

Hierbij moeten gevoegd worden de voorwaardenvergelijkingen (11) in Dr. KORTEWEG's verhandeling voor de rollende beweging, en welke in ons geval, nl. $f(\theta) = R \sin\theta$, overgaan in

$$\dot{\xi} = R(\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi - r\cos\psi), \quad \dot{\eta} = -R(\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi + r\sin\psi)$$

waarin

$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}$$

te stellen is. Hieruit volgt verder:

$$\ddot{\xi}\cos\psi + \ddot{\eta}\sin\psi = R(\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta - \dot{r})$$

$$-\ddot{\xi}\sin\psi + \ddot{\eta}\cos\psi = -R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta + r\dot{\psi})$$

De vergelijkingen voor de beweging *om* het zwaartepunt gaan hierdoor over in

$$\frac{d\,Cr}{dt} = MR^2(\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta - \dot{r})$$

$$\frac{d\,(A\dot{\psi}\sin^2\theta + Cr\cos\theta)}{dt} = MR^2(\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta - \dot{r})\cos\theta$$

$$A\ddot{\theta} - (A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta - Cr\dot{\psi}\sin\theta) = -MR^2\sin\theta(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta + r\dot{\psi})$$
$$- MR\cos\theta(g + R(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)).$$

De eerste herleid wordt

$$(C + MR^2)\dot{r} = MR^2\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta$$

de formule (17) in Dr. KORTEWEG's verhandeling.

De tweede, als volgt geschreven,

$$\frac{dA\dot{\psi} \sin^2 \theta}{dt} + C\dot{r} \cos \theta - Cr\, \dot{\theta} \sin \theta = MR^2(\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta - \dot{r}) \cos \theta$$

gaat tengevolge van de zooeven gevonden betrekking over in

$$\frac{dA\dot{\psi} \sin^2 \theta}{dt} = Cr \sin \theta \,.\, \dot{\theta}$$

de formule (18) van Dr. KORTEWEG.

De derde eindelijk gerangschikt wordt

$$(A + MR^2)\, \ddot{\theta} + MgR \cos \theta + MR^2 \sin \theta \,.\, r\dot{\psi} + Cr\dot{\psi} \sin \theta -$$
$$- A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \,,$$

en kan bijgevolg als volgt geschreven worden:

$$\frac{d\{(A + MR^2)\dot{\theta}^2 + 2MgR \sin \theta\}}{d\theta} + P = 0,$$

waar

$$P = 2Cr\dot{\psi} \sin \theta + 2MR^2 \sin \theta \,.\, r\dot{\psi} - 2A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

te stellen is.

Deze vorm P kan met gebruikmaking van de gevonden betrekkingen achtereenvolgens herleid worden als volgt:

$$P\dot{\theta} = 2Cr\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta + 2MR^2 \sin \theta \,.\, r\dot{\theta}\dot{\psi} - 2A\dot{\psi}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2\dot{\psi}\, \frac{dA\dot{\psi} \sin^2 \theta}{dt} + 2(C + MR^2)r\dot{r} - 2A\dot{\psi}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2\dot{\psi}(A\ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) + 2\,(C + MR^2)r\dot{r} -$$
$$- 2\, A\dot{\psi}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2A\dot{\psi}\ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2A\dot{\psi}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + 2\,(C + MR^2)r\dot{r}$$

$$= \frac{d(A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + (C + MR^2)\, r^2)}{dt}.$$

Bijgevolg is

$$P = \frac{d(A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + (C + MR^2)r^2)}{d\theta}$$

Zoodat de derde vergelijking nu geintegreerd kan worden en geeft tot integraalvergelijking:

$$(A + MR^2)\,\dot{\theta}^2 + 2MgR\sin\theta + A\dot{\psi}^2\sin^2\theta + (C + MR^2)r^2 = K,$$

de formule (16) van Dr. KORTEWEG, en die dadelijk is op te schrijven, als uitdrukkende de standvastigheid van de totale energie.

De oplossing van het vraagstuk is dus teruggebracht tot de integratie van de drie gevonden vergelijkingen, welke ook als volgt kunnen geschreven worden:

$$\frac{d\left(\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta}\right)}{d\theta} = Qr\sin\theta$$

$$\dot{\psi}\sin\theta \qquad = \frac{C}{AQ}\frac{dr}{d\theta}$$

$$(A + MR^2)\,\dot{\theta}^2 + 2MgR\sin\theta + A\dot{\psi}^2\sin^2\theta + (C + MR^2)r^2 = K$$

waar

$$Q = \frac{C}{A}\,\frac{MR^2}{C + MR^2}$$

te stellen is.

De eerste geintegreerd geeft r als functie van θ; de tweede geeft dan $\dot{\psi}$ als functie van θ, waardoor de derde een differentiaalvergelijking wordt, die geintegreerd θ als functie van den tijd geeft, waarmede ook r en ψ als functiën van t te bepalen zijn.

De coordinaat $\zeta = f(\theta)$ is dan tevens bekend, terwijl de voorwaardenvergelijkingen $\dot{\xi}$ en $\dot{\mu}$ als functiën van t geven en daarmede de ontbondenen X, Y, Z van den weerstand van het steunvlak.

Uit het oogpunt van de theoretische Mechanica is hiermede het vraagstuk opgelost.

BIBLIOGRAPHIE.

L'enseignement mathématique, revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs: C. A. LAISANT et H. FEHR. Paris, Georges Carré et C. Naud.

Van deze revue, die blijkens de mededeeling op den omslag, gesteld is onder de hoede van een „comité de patronage", bestaande uit een aantal bekende geleerden van verschillende nationaliteit, ontving het *Nieuw Archief* het nummer voor 15 Maart 1900. Dit nummer bevat (blz. 77—136) een vijftal lezenswaardige artikelen. V. Schlegel geeft een overzicht van de ontwikkeling der meetkunde van *n* afmetingen, vergezeld van eene uitvoerige opgave der litteratuur; J. Andrade behandelt de beteekenis, die men bij het elementair meetkundig onderwijs aan het postulaat van Euclides moet toekennen; L. Ripert bespreekt het groote nut van het begrip „oneindig" in de elementaire meetkunde; G. Fontoné wijst op de wenschelijkheid om verandering te brengen in eenige meetkundige benamingen; A. Poussart deelt een bewijs mede van de stellingen van Bezout en Euler ten aanzien van de onderlinge deelbaarheid van twee veeltermen.

Hierna volgen eene „Chronique" en eene afdeeling „Bibliographie", in welke laatste eenige nieuw verschenen boekwerken worden besproken. Ten slotte vindt men in een „Bulletin Bibliographique" titel- en gedeeltelijke inhoudsopgave van eenige tijdschriften.

Wij bevelen deze revue gaarne in de belangstelling van de leden van het Genootschap aan. Kl.

Le Degré du Méridien terrestre mesuré par la distance des parallèles de Bergen-op-Zoom et de Malines par WILLEBRORD SNELLIUS, publié par HENRI BOSMANS de la Compagnie de Jésus. — Bruxelles, Polleupis et Centerick, 1900.

Snellius heeft, gelijk men weet, in zijn *Eratosthenes Batavus* (1617) uit den afstand van Alkmaar tot Bergen-op-Zoom — bij

de onderstelde bolvormingheid der aarde — de lengte van den meridiaangraad afgeleid. In zijn werk ontdekte hij later verschillende fouten. Dit gaf hem aanleiding om de meting van alle hoeken te herhalen; tevens strekte hij zijne triangulatie uit van Bergen-op-Zoom tot Mechelen, om met des te meer zekerheid de lengte van den meridiaangraad te kunnen vaststellen; ten slotte maakte hij nog van een strengen winter gebruik om op het ijs zijn basis nauwkeuriger te bepalen dan vroeger mogelijk was geweest. [1])

Deze verbeteringen, in zooverre zij door Snellius eigenhandig waren opgeteekend in een exemplaar van *Eratosthenes*, werden gepubliceerd ten jare 1729 door Petrus Van Musschenbroek in zijn *Dissertatio de magnitudine terrae;* echter heeft Van Musschenbroek aangaande de metingen tusschen Bergen-op-Zoom en Mechelen niets anders gevonden dan eene figuur door Snellius geteekend, terwijl hij de resultaten verloren achtte. „Dolendum est" zoo schrijft hij „cum ulterius mensuram produxerat Geometra usque ad Machliniam, veluti in Tab. XVI repraesentatur, eas observationes periisse; non enim illas in emendationibus reperio, unde praeter merum Schema ab ipso Autore depictum, nihil exhibere potui."

Toch was ook de uitkomst dezer metingen door Snellius toegevoegd aan een ander exemplaar van *Eratosthenes Batavus*, dat in de koninklijke bibliotheek te Brussel bewaard wordt. [2])
Dit onuitgegeven deel van Snellius' arbeid heeft P. Bosmans thans gepubliceerd, ook in de *Annales de la Société scientifique de Bruxelles;* een belangwekkende historische inleiding, en talrijke aanteekeningen voegde hij er bij.

Terwijl het breedteverschil van Bergen-op-Zoom en Mechelen in werkelijkheid ruim 27′ 55″ bedraagt, noemt Snellius daarvoor slechts 24′; men zal dus licht begrijpen, dat de becijferingen, die hier tot het resultaat voeren van 28545 Rijnlandsche roeden voor de graadlengte, slechts historische beteekenis hebben, — evenals de toch reeds verbeterde berekeningen, die aan Snellius de waarde van 28513 Rijnlandsche roeden opleverden uit den afstand van Alkmaar tot Bergen-op-Zoom;

[1]) Zie P. van Geer, Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius, Archives Néerl., t. XVIII, p. 463.

[2]) Section des Manuscrits, n°. 15493.

voor het verschil in poolshoogte dezer twee plaatsen nam hij 1° 11',50, terwijl het nog niet ten volle 1° 8' 14" bedraagt.[1]) Toch blijft de historische beteekenis van elk fragment van Snellius' werk; en daarom zullen inzonderheid de Nederlandsche wiskundigen P. Bosmans dank weten voor de moeite en zorg, aan de uitgave en toelichting dezer metingen gewijd.

S. Krüger S. J.

Rekenkunde. Theorie en practijk ten dienste van Normaal- en Middelbaar Onderwijs, door P. Brasseur, leeraar aan de staatsnormaalschool van Lier, (16 hoofdst., 536 blz.; fr. 5.—). Gent, Ad. Hoste, 1899.

Dit leerboek bevat o.a. vele leerrijke aanteekeningen over talstelsels, over renterekening, met inbegrip van lijfrenten en annuïteiten, en over handelsrekenen. De talrijke vraagstukken zijn naar typen gerangschikt.

Mr.

Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht, veröffentlicht durch die Verlagshandlung von Martin Schilling in Halle a. S. Nachtrag, Halle a. S., 1900.

Deze uitgave is een voortzetting van de bekende modellenreeks van de firma L. Brill in Darmstadt en staat onder de wetenschappelijke leiding van Prof. Dr. Fr. Schilling te Göttingen.

Mr.

Geometria piana (394 blz.; L. 3.—), Geometria solida (297 blz.), di F. Giudice, Prof. di Matematica nel R. Instituto T. V. E. Libero docente d'Algebra nella R. universita di Genova. Brescia, F. Apollonis, 1897–1900.

Behalve de stof, die men gewoonlijk in elementaire leerboeken over meetkunde aantreft, bevat dit werkje ook eenige aanteekeningen over verwante onderwerpen, als niet-euclidische meetkunde, zoogenaamde nieuwere meetkunde, meetkunde van

---

[1]) Van Musschenbroek neemt voor de breedte van Bergen-op-Zoom 51° 28' 47", hetgeen nog 13" meer afwijkt van de werkelijke waarde dan het door Snellius aangenomen cijfer 51° 29'. De breedte van Alkmaar daarentegen wordt door Van Musschenbroek, die hier Cassini volgt, omtrent 40" te groot genomen.

P. Bosmans geeft een ander voorbeeld, waarin Van Musschenbroek de verkeerde opgave van een hoek bij Snellius door een nog meer foutieve vervangt.

de ruimte met n afmetingen, meetkunde van den driehoek, punttransformaties, enz. Mr.

Nijverheids- en Handelsrekenen, ten gebruike van Nijverheid-, Beroep- en Adultenscholen (2 dln. in 1 band, 9 hoofdst., 260 blz.; fr. 2.—), door H. DE GUCHTENAERE, leeraar aan de Nijverheidsschool te Gent. Gent, Ad. Hoste, 1900.

Een uiterst practisch werkje met vele vraagstukken op allerlei gebied, o. a. ook op dat der textielindustrie. Mr.

Trattato di Algebra elementare, con molti esercizi di G. M. TESTI, (20 hoofdst., 710 blz.; L. 4.—). Livorno, R. Giusti, 1900.

Dit werkje onderscheidt zich vooral door een streven naar wetenschappelijke behandeling der stof. De onmeetbare getallen worden ingevoerd door middel van de algemeene theorie der grootheden, zooals deze ontwikkeld is door R. Bettazzi (zie: „Teoria delle grandezze", Pisa, Spoerri, 1890), de complexe getallen door middel van meetkundige beschouwingen.
Mr.

A Text-Book of Geometry, by G. A. WENTWORTH, A. M. Revised edition. Boston, U. S. A. Ginn & Company, 1899.

Een heldere stijl, goedgekozen oefeningen, keurige druk en een fraai bandje maken deze uitgave tot een bij uitstek practisch schoolboek. Wat al te practisch echter dunkt het ons, dat de schrijver alle moeilijkheden omtrent euclidische of niet-euclidische meetkunde afsnijdt, door het „parallellen-axioma" tot een gevolg te verklaren van de stelling, dat twee loodlijnen op een zelfde rechte evenwijdig loopen. Mr.

Traité de géométrie par E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE. Septième édition, revue et augmentée par EUGÈNE ROUCHÉ. I. Het platte vlak, fr. 7,50. II. De ruimte, fr. 9,50 Parijs, Gauthier-Villars, 1900.

Deze zevende druk van het gunstig bekende leerboek, dat in stede van zich bij de in Frankrijk vigeerende officieele programma's te bepalen een overzicht tracht te geven van alle methoden en hunnen onderlingen samenhang, is werkelijk

aanzienlijk vermeerderd. De bladzijden-aantallen der beide deelen, die in den vierden druk van 1879 nog slechts 362 en 549 bedroegen, zijn hier tot 548 en 664 geklommen.

Wat deze nieuwe druk van den onmiddellijk voorgaanden onderscheidt, is in hoofdzaak *a*) de uitbreiding van het aan de geschiedenis der meetkunde gewijde gedeelte, *b*) de toevoeging van een afzonderlijk hoofdstuk over symmetrie, *c*) de ontwikkeling van de theorie der isogonale cirkels, *d*) de uitbreiding van de oplossing der vraagstukken van Apollonius, *e*) de afronding van het bewijs der onmogelijkheid van de kwadratuur van den cirkel, doch vooral *f*) de opneming van eenige afzonderlijk voor dit doel bestemde verhandelingen als de door Neuberg bewerkte „meetkunde van den driehoek" en de door Lemoine opgestelde „geometrographie" in het eerste, de door Poincaré geleverde „niet-euclidische meetkunde" en de van NEUBERG afkomstige „meetkunde van het viervlak" in het tweede deel.

Ook in dezen zevenden druk vindt men in het tweede deel een groote ruimte (p. 289 – 507) gewijd aan de gebruikelijke krommen en oppervlakken. Tot oefening van den lezer bevat elk deel ruim 500 met zorg verzamelde vraagstukken.

De figuren zijn over het algemeen prachtig uitgevoerd; de druk is uitstekend. S[e].

Recueil de problèmes de géométrie analytique à l'usage des classes de mathématiques spéciales, par F. MICHEL. Solutions des problèmes donnés au concours d'admission à l'école polytechnique de 1860 à 1900. Een deel in 8° van 240 blz. met 70 fig. Prijs 6 fr. Parijs, Gauthier Villars, 1900.

Bij de oplossing van dit vijftigtal vraagstukken, die voor het meerendeel zeer leerzaam zijn, heeft de schrijver getracht den weg te volgen, die zich als van zelf aanbood en in vele gevallen dan ook wel de eenvoudigste zal zijn; daarbij heeft hij zich bij voorkeur bediend van de analytische methode en zich alleen ter vermijding van lange berekeningen en ter verhooging van de sierlijkheid nu en dan eens meetkundige beschouwingen veroorloofd.

Ieder vraagstuk wordt voorafgegaan door een of meer der aan de bewerkers der *Revue semestrielle* welbekende merken, iedere oplossing wordt gevolgd door eenige bibliographische verwijzingen omtrent elders gepubliceerde oplossingen. De aard

der vraagstukken kan dus reeds eenigermate afgeleid worden uit de opgaaf der merken; ze zijn K 10 e^2, 11 d, 16 f, 18 e, f, L^1 4 e, 5 b^2, 10 a, b, 11 b^2, 16 b^4, 17 a^8, e, 18 c^7, d^3, β^2, γ^2, L^2 1 a, 2 i, 4 a, 14 b, 17 a, M^1 3 i, M^2 2 h, 3 d, 4, a, e.

We stippen aan, dat we achter de oplossing van het op blz. 54 opgegeven vraagstuk, waarin de schaduwkromme op het scheeve schroefvlak onderzocht wordt, een verwijzing naar het bekende werk van J. de la Gournerie hebben gemist.

De uitvoering van het boek is in alle opzichten te prijzen.

S^e.

Gronden der beschrijvende meetkunde van J. Badon Ghyben. Achtste druk, bewerkt door N. C. Grotendorst en J. W. C. Beelenkamp. Eerste deel met aanhangsel. Breda, 1900.

Van den tekst van dit leerboek zijn 152 blz. gewijd aan de theorie en 20 blz. aan de toepassing van deze op de eenvoudigste constructies der versterkingskunst, terwijl een afzonderlijke atlas 123 figuren en 8 platen bevat, die bij de theorie en de toepassing dienst doen.

Deze achtste druk van het eerste deel van het bekende leerboek, dat vooral voor eigen studie van eerstbeginnenden mag worden aanbevolen, onderscheidt zich slechts weinig van den voorgaanden. We stippen alleen aan, dat van het vraagstuk „door een punt een lijn te trekken, die met de beide projectievlakken gegeven hoeken maakt" thans twee oplossingen gegeven zijn, dat daarentegen van het vraagstuk „door een punt een vlak te brengen, dat met de beide projectievlakken gegeven hoeken maakt" een oplossing minder gegeven is dan voorheen, dat de oplossing van het vraagstuk „de doorsnee te construeeren van twee pyramiden" een uitbreiding heeft ondergaan en het aantal gemengde vraagstukken ter oefening, dat op de theoretische hoofdstukken volgt, van 100 tot 125 is geklommen.

S^e.

Arithmetic theoretical and practical, by J. S. Mackay, M. A. (472 blz.; 4 sh. 6 d.). London & Edinburgh, Chambers, 1899.

Dit engelsche schoolboekje munt uit door vorm en inhoud.

S^e.

Arithmetica particulare e generale di F. AMODEO. Volume primo degli elementi di matematica. Opera destinata alle scuole secondarie del regno d'Italia (9 hoofdst., 415 blz.). Napels, L. Pierro, 1900.

Dit werkje van den bekenden wiskundige behandelt behalve de gewone onderwerpen der rekenkunde ook de complexe getallen en de quaternionen; het besluit met een kort overzicht der logica mathematica van Peano. S[e].

Elementi di geometria ad uso dei ginnasi e licei, di G. VERONESE e P. CAZZANIGA. Twee deeltjes in klein 8^0, deel 1, 117 p., deel 2, 239 p. Verona e Padova, Fratelli Drucker, 1900.

De in dit werkje gevolgde leergang verschilt aanzienlijk van den gewonen. Zoo wordt hier het denkbeeld groep vooropgesteld en luidt het eerste postulaat „er *zijn* verschillende punten, enz. S[e].

Elementary trigonometry by A. J. PRESSLAND, M. A. and CH. TWEEDIE, M. A. (25 hoofdst., 343 blz.). Edinburgh, Oliver & Boyd, 1900.

Dit werkje maakt deel uit van een „educational series". Het behandelt op verdienstelijke wijze de goniometrie en de rechtlijnige trigonometrie en bevat een aantal vraagstukken. S[e].

STEVIN'S PROBLEMATA GEOMETRICA

DOOR

N. L. W. A. GRAVELAAR.
(Deventer.)

Le plus souvent on ne veut savoir que pour en parler. PASCAL.

„Die eigentlich mathematischen Schriften Stevins", zegt Moritz Cantor in zijn Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2[ter] Band, Leipzig 1892, pp. 528–529, „nöthigen uns ihm mehrfach unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden. Für's Erste haben wir es mit seinen geometrischen und mechanischen Werken zu thun, wobei aber eine Schwierigkeit auftritt. Die weitaus verbreitetste Ausgabe von Stevins Werken ist die französische Uebersetzung durch Albert Girard, welche nach Stevins Tode vorbereitet erst 1634 nach Girards Tode herauskam. Bei der an Unauffindbarkeit grenzenden Seltenheit der früheren Drucke ist es uns unmöglich zu bestimmen, wie weit in dieser Girard'schen Gesammtausgabe, abgesehen von Zusätzen des Herausgebers, welche durch Beisetzung von dessen Namen als solche gekennzeichnet sind, noch Veränderungen eintraten. Ob z. B. die fünf Bücher geometrischer Aufgaben von 1585 in den sechs Büchern *De la practique de Géométrie* unserer Ausgabe enthalten sind, lässt sich nicht entnehmen. Unwahrscheinlich ist es nicht, aber denkbar wäre auch, dass jene erste geometrische Schrift für uns gänzlich verloren gegangen wäre. Die letztere Möglichkeit beruht darauf, dass in der lateinischen Ausgabe von 1605—1608, welche in manchen Dingen von der französischen sich unterscheiden soll, und welche namentlich eine Abtheilung *De miscellaneis* besitzt, welche dort ganz fehlt (Kästner III, 407), auch ein Verzeichniss von Schriften sich findet, welche hätten abgedruckt werden sollen, aber vom Her-

ausgeber noch nicht druckfertig gestellt werden konnten und desshalb vorläufig zurückgelegt wurden (Kästner III, 410—411). Allerdings sind die *Problemata geometrica* weder in den *Miscellaneis* noch in dem Verzeichnisse fehlender Stücke enthalten, und damit ist für die erstere Möglichkeit eine Stütze gewonnen, welche durch einen Ausspruch des Adriaen van Roomen von 1593 wesentlich verstärkt wird. Dieser berichtet nämlich (Quetelet pag. 167, Note 1) von einem umfassenden geometrischen Werke Stevins, an welchem derselbe arbeite, nachdem er 1583 (?) eine Probe davon in den fünf Büchern Aufgaben gegeben habe." [1])

Ik stel mij voor de quæstiën, door Cantor opgeworpen, tot klaarheid te brengen: bronnen, om uit te putten, behooren in ons land niet, als elders, tot de zeldzaamheden.

Laat mij beginnen met een opgaaf van Stevin's geschriften, bewerkt naar:

Bierens de Haan, Bouwstoffen voor de Geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden, 2e Verz., 1887, No. XXV, waar men de volledige titels en inhouden, de herdrukken en vertalingen, die van verscheidene het licht hebben gezien, en meer wetenswaardigheden vermeld vindt:

1) Tafelen van Interest, Leiden 1582, 8°. 92 pp.
2) Problemata Geometrica, Antwerpen [1583], 4°. 119 pp.
3) Dialectike ofte Bewysconst, Leiden 1585, 8°. 196 pp.
4) De Thiende, Leiden 1585, 8°. 36 pp.
5) L'Arithmetique, Leiden 1585, 8°. 680 pp.
6) La Pratique d'Arithmetique, Leiden 1585, 8°. 216 pp., waarin ook de Tafelen van Interest en De Thiende zijn opgenomen.

Nos. 5 en 6 verschenen in één band.

7) De Beghinselen der Weeghconst, Leiden 1586, 4°. 132 pp.
8) De Weeghdaet, Leiden 1586, 44 pp.
9) De Beghinselen des Waterwichts, Leiden 1586, 4°. 72 pp.

Nos. 7, 8 en 9 verschenen in één band.

---

[1]) Omtrent dit citaat en dat in de noot op p. 103, die in den 2en druk van 1900 op p. 573 en p. 620, Noot 3), voorkomen, zie men aldaar Vorwort, p. VIII.

10) De motu coeli, Leiden 1589, 8°.

11) Vita Politica, Het Burgherlick leven, Leiden 1590, 8°. 56 pp.

12) Appendice Algebraïque, 1594, 8°. 8 pp.

13) De Sterctenbouwing, Leiden 1594, 4°. 99 pp.

14) De Havenvinding, Leiden 1599, 4°. 28 pp.

15) Gemeene Reghel op Gesanterie, 1605.

16) Wisconstige Gedachtenissen, Leiden 1608, 2°. 1685 pp., waarin ook De Havenvinding (1e Stuck, 2e Deel, 5e Bouck), De Beghinselen der Weeghconst (4e Stuck, 1e en 2e Bouck), De Weeghdaet (4e Stuck, 3e Bouck) en De Beghinselen des Waterwichts (4e Stuck, 4e en 5e Bouck) zijn opgenomen.

17) Castrametatio, dat is Legermeting, Rotterdam 1617, 2°. 64 pp.

18) Nieuwe Maniere van Sterctebou, door Spilsluysen, Rotterdam 1617, 2°. 64 pp.

Nos. 17 en 18 verschenen in één band.

19) Materiæ Politicæ, Burgherlicke Stoffen, Leiden 1649, 4°. 297 pp., waarin ook Het Burgherlick leven (2 Onderscheyt) en de Gemeene Reghel op Gesanterie (5 Onderscheyt) zijn opgenomen.

20) Verrechting van Domeine, Leiden 1649, 4°. 427 pp., waarin ook uit de Wisconstige Gedachtenissen (5e Stuck, 2e Deel) de Vorstelicke Bouckhouding in Domeine en Finance Extraordinaire, op de Italiaensche Wyse, is opgenomen.

Nos. 19 en 20, „uyt [Stevin's] naegelate Hantſchriften by een geſtelt door Sijn [oudsten] Soon Hendrick Stevin, Heere van Alphen, van Schrevelſrecht, &c.", verschenen in één band.

21) Grondsteen van een vaste regeering, 2e druk, 1754.

22) Vanden Handel der Watermolens, 4°. 34 pp., en Vanden Handel der Waterschuyring, 4°. 84 pp., in: Henric Stevin, Wisconstich Filosofisch Bedryf, met afzonderlijk Plaetboec, Leiden 1667, X. en XI. Boec.

23) Vande Spiegeling der Singconst, 8°. 39 pp., en Vande Molens. Gereviceert door denProfessor Golius. 1634., 8°. 32 pp., in: Bierens de Haan, t. a. p., Nos. XXVI en XXVII, en afzonderlijk: Amsterdam 1884.

Stevin's Wisconstige Gedachtenissen, „Inhoudende t'ghene daer hem in gheoeffent heeft Den Doorlvchtichsten Hoochgheboren

Vorst ende Heere, Mavrits Prince van Oraengien, Grave van Nassau, Catzenellenbogen, Vianden, Moers &c. Marckgraef vander Vere, ende Vlissinghen &c. Heere der Stadt Grave ende S'landts van Cuyc, St. Vyt, Daefburch &c. Gouverneur van Gelderlant, Hollant, Zeelant, Westvrieflant, Zutphen, Vtrecht, Overyssel &c. Opperste Veltheer vande vereenichde Nederlanden, Admirael generael vander Zee &c.", ja zelfs verschillende opmerkingen van „sijn Vorstelicke Ghenade" bevattende, zijn verdeeld in vijf stucken:

1) vant Weereltschrift [cosmographie, 924 pp., van 1608], dat uit drie deelen bestaat:

  a) vanden Driehouckhandel [trigonometrie, 374 pp.],
  b) vant Eertclootschrift [geographie, 192 pp.],
  c) vanden Hemelloop [astronomie, 358 pp.];

2) vande Meetdaet [204 pp., van 1605];

3) vande Deursichtighe [perspectief, terugkaatsing van het licht in vlakke en gebogen spiegels, 108 pp., van 1605];

4) vande Weeghconst [statica der vaste lichamen en vloeistoffen, 220 pp., van 1605];

5) vande Ghemengde Stoffen [22› pp., van 1608], dat uit twee deelen bestaat:

  a) vande Telconstighe Anteyckeninghen [8 pp.],
  b) vande Vorstelicke Bouckhouding in Domeine en Finance Extraordinaire [203 pp.].

Aan het einde van het werk (5e Stuck, p. 107) vindt men een lijst „Van Ettelicke Ghebrekende stoffen, die inde voorgaende Cortbegrijpen [vóór de Stucken, Deelen, Boucken, enz.] vvel ghestelt vvesende, nochtans daer na onbeschreven sijn ghebleven.

Ten eersten de Wanfehaeuwing [breking van het licht], wesende het 3 bouck des derde stucx vande Deursichtighe.

Ten tweeden de Watertrecking, wesende het 5 deel des Byvougs int vierde stuck der Weeghconst.

Ten derden het Lochtwicht, wesende het 6 deel des Byvoughs int vierde stuck der Weeghconst.

Ten vierden gebreken inde Telconstige anteyckeninghen verscheyden Hooftstucken, wesende het 1 deel des vijfde stucx vande Ghemengde stoffen.

Ten vijfden Spiegheling [theorie] der Singconst, wesende het 3 deel des vijfde stucx vande Ghemengde stoffen.

Ten feften den Huyfbou, wefende het 4 deel des vijfde ftucx vande Ghemengde ftoffen.

Ten fevenden den Crijchshandel, wefende het 5 deel des vijfde ftucx vande Ghemengde ftoffen.

Ten achtften Verfcheyden anteyckeninghen, wefende het 6 deel des vijfde ftucx vande Ghemengde ftoffen.

D'oirfaeck waerom die niet gheftelt en fijn na t'inhoudt der voorfchreven Cortbegrijpen, is datfe niet volcommelick genouch gereet en waren, doen den Drucker [Ian Bouwenfz. woonende op de hoogelantfche Kerckgraft tot Leyden] niet langher by hem en begheerde te bewaren datter een tijt lanck tot fijn achterdeel ghedruckt hadde gheleghen: Sulcx dat mijn voornemen nu is de bovefchreven reft ter gheleghender tijt te laten uytgaen.",

waarvan evenwel niet gekomen is.

De Wisconstige Gedachtenissen werden door den Leidschen Hoogleeraar Willebrordus Snellius in het Latijn vertaald onder den titel:

Hypomnemata Mathematica, Leiden 1608, 2 Dl., 2°. 1571 pp.,[1])

---

[1]) Bij Cantor, t. a. p., II p. 569 Noot 2), vindt men aangeteekend: „Der II. Band der Hypomnemata erschien 1605, der I. erst 3 Jahre später 1608. Der Grund lag darin, dass die Schriften des I. Bandes noch ins Lateinische zu übersetzen waren, während die des II. Bandes ursprünglich lateinisch verfasst waren."

Vanwaar deze dwaling? De Wisconstige Gedachtenissen verschenen in één deel met één algemeenen titel en vóór ieder van de vijf stukken een dergelijken bijzonderen titel. Evenzoo de Hypomnemata Mathematica, die evenwel in twee deelen het licht zagen; het 2e deel bevat de stukken 2—5 en begint met den bijzonderen titel van het 2e stuk, zonder dat een algemeene titel voorafgaat. Volgens den algemeenen titel van het werk (in het 1e deel) zijn de Hypomnemata Mathematica door Stevin geschreven en door Snellius uit het Nederduitsch in het Latijn overgezet (A Simone Stevino confcripta, & è Belgico in Latinum à VVil. Sn. converfa.); de bijzondere titels der vijf stukken vermelden alleen, dat Stevin de schrijver is (2e, 3e en 4e st.: Confcriptus à Simone Stevino Brugensi.; 1e en 5e st.: Confcriptus à Simone Stevino.). Verder vindt men op den algemeenen titel het jaartal 1608 en op de bijzondere titels van het 2e, 3e en 4e stuk het jaartal 1605 en op die van het 1e en 5e stuk het jaartal 1608. Cantor, die den bijzonderen titel van het 2e stuk voor den algemeenen titel van het 2e deel zal hebben aangezien, moest dus wel meenen, dat alleen het 1e deel vertaald was, waardoor tevens verklaard werd, waarom het 1e deel van 1608 en het 2e deel van 1605 dateerde.

en door Jean Tuning, Secretaris van Prins Frederik Hendrik, in het Fransch onder dien van:

Memoires Mathematiques, Leiden 1608, 2°. 808 pp.

De Fransche uitgaaf bevat evenwel slechts de vertaling van den Driehouckhandel (1e st. 1e dl.), van bk. 1—4 van de Meetdaet (2e st.), die zes boeken telt, van de Verschaeuwing (perspectief, 3e st. 1e bk.) en van de Vorstelicke Bouckhouding (5e st. 2e dl.).

Ook treft men stuk 1—4 der Wisconstige Gedachtenissen als „Memoires Mathematiques du Prince Maurice de Nassau" aan in:

Girard, Les Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin, Leiden 1634, 2°. 910 pp.,

waarin buitendien de Arithmetique, de Pratique d'Arithmetique, de Castrametatio, de Nieuwe Maniere van Sterctebou door Spilsluysen en de Sterctenbouwing zijn opgenomen „le tout reveu, corrigé, & augmenté par Albert Girard Samielois [d. w. z. van Saint-Mihil in Lotharingen], Mathematicien".

De lijst der „ghebrekende stoffen" komt natuurlijk in de uitgaven van Tuning en Girard niet voor.

Voor hem, die Stevin's werken wil leeren kennen, zijn Girard's Oeuvres Mathematiques de Stevin, en de, door Hendric Stevin in één band uitgegeven, Materiæ Politicæ en Verrechting van Domeine de aangewezen bronnen. Cantor bedient zich uitsluitend van Girard's uitgaaf.

Voor de handschriften van Stevin schijnt na diens dood in 1620 weinig zorg gedragen te zijn, waarover zijn zoon Hendrick zich meermalen beklaagt.

In de Materiæ Politicæ van 1649 zegt hij op p. 3 van de Opdracht aan Prins Willem II, dat de handschriften zijns vaders door „ontijdighe aflijvicheyt, ongheformt ghebleven, en daer na, deur ander verſuym, van veele der volmaeckſte ghefift" zijn, en zijn „Hendrick Stevin Aenden Leser" begint aldus: „Ghemerckt het voornemen niet en was de eerſtgedruckte Wiſconſtighe ghedachteniſſen, welcke na des Schrijvers eyntlicke

---

Buitendien schijnt Cantor dit werk slechts te kennen uit de beschrijving bij Kästner, Geschichte der Mathematik, 3ter Band, Göttingen 1799, van een exemplaar zonder den algemeenen titel en zonder de opdracht van Snellius aan Prins Maurits; de algemeene titel wordt door Kästner later afzonderlijk opgegeven.

meyning ghefchickt fijn, te herdrucken, om de ghene, die door my lichtelick meer verwart dan gheredt fullen gheoirdeelt worden te fijn, daer by te voughen; Maer defe, van die afghefcheyden, befonderlick uyt te gheven, om tuffchen d'een en d'ander een merckelick onderfcheyt te maken, (te meer alfoo wy deur verfcheyden onachtfaemheden, na des Schrijvers overlijden, vande meeftvolmaeckfte fijn ontbloot gheworden, welcker veele, behalven de fekerheyt die wy, foo deur eyghen gheheughenis, als gheloofweerdighe ghetuyghenissen van anderen daer af hebben, uyt de felve eerftgedruckte blijcken can in wefen te fijn gheweeft) foo heb ick my an d'oirden die fommighe der ftucken of deelen van dien in't Cortbegrijp des vijfden Stucx der felve eerftghedruckte, ghegheven was, niet ghenootfaekt ghevonden te verbinden, maer die na 't ghene my de omftandighen en eyghen beweghinghen fchenen te vereyffchen, ghefchickt."

En in zijn Wisconstich Filosofisch Bedryf van 1667 leest men op p. 5 van het 1e boek: „Sijn [wij] alweer aent herluyfen, en deurfnuffelen voornamentlic der bladẽ vande voornoemde boeken en hantfchriften gevallen: Ende daer in ten leften fo laetdunckende geworden; Dat wy de hantfchriften (welke nu deur onachtfaemheyt, al veel jaren onder verfcheyden geleerde handen waren vertrout, fonder yets anders, onfes wetens, daer me verricht te zijn, als datfe van vele voltrockene delen, daer wy genoegfame kennis af menen te hebben, geledigt, en fulx de reft heel ongeret, wijt en zijt deur malcander verftroyt waren) naer ons de faec genoegfaem docht te mogen lyen, tot fekere by eencomften brachten: Ende eyntlic daer uyt een boec fchifteden, dat wy al over achtien jaren onder den naem van Burgerlicke ftoffen lieten drucken"; en op p. 3 van het 2e boek: „Hebbende ons Broeder Fredric Stevin zal. in fyn joncheyt, geleden ontrent dertich jaren, ter ftudi gelegen, by enen Heer Abraham Beecman, doen Rector tot Rotterdam, en groot liefhebber der Wifconften; hadde hy Beecman, by die gelegentheyt, de hantfchriften onfes Vaders Simon Stevin, die onder ons Moeder doen noch overich waren (zijnde deur haer onbedacht toelaten te voren al van vele der voornaemfte gefift) ooc in hande gekregen; En daer uyt verfcheyde ftoffen in een boec van meer andere zijnder eygen aenteyckeningen overgedragen: En onder anderen ettelicke gedachteniffen van

watermolens en ander cam en ſtaefwerc, dat wij t'zijnder tijt en plaets hier of elders menen op te geven".

Achter de Verrechting van Domeine van 1649 (pp. 139—150) vindt men de „Tytels En Cortbegrypen Der Stucken welcke gehooren totte wisconſtige gedachteniſſen, inhoudende 'tgeene daer hem in geoeffent heeft den Doorluchtichſten Vorſt en Heere Maurits Prinçe van Orange &c. Ho. Lo. Memorie, Beſchreven deur Zal. Simon Stevin Van Brugge, ſo die uyt des ſelfs nagelaten handtſchriften ſijn by een gheſtelt deur ſyn Soon Hendrick Stevin. Ende hier gevought ten eynde als inde voorreden an den Leſer [in de Materiæ Politicæ] is verklaert.", alwaar men (pp. 3-4) leest: „[Ik] ga voort om te ſegghen waerom ick hier noch by ghevought heb de Opſchriften en Cort begrijpen ghenoughſaem van al 't ghene anmerckens weerdich my ter hant gecommen: Wanttet ghebeuren conde, dat ymant ſommighe der voorſchreve vermiſte ſtucken ontmoet ſijnde en dienvolghens het werck volmaeckter kennende, mijn miſgrepen overal beſcheydelick anwees, waer deur men niet alleen dien laſter te draghen, maer oock den becoſtigher des drucx te ghewiſſer ghevaer van verlies te verwachten had, ſoo men ten eerſten alles uytgave, ſoo docht my gheen beter middel om daer teghen te voorſien, als deur het uytgheven deſer Opſchriften en Cort begrijpen bekent te maken, hoe 't mette ſaeck in 't gheheel gheleghen is, of miſſchien de Beſitters der meerghemelte vermiſte ſtucken, ſiende wat ons ſoo in ſtof als form ghebreeckt, mochten bewoghen worden tijdelick anwijſing daer af te doen, 't ſy met die deur den druck ghemeen te maken of anders; Want wy daerom geeren 't genot des Octroys, ſooder eenich in gheleghen is, willen afſtaen; Welverſtaende in ghevalle beweſen of ons verthoont wort, die na des Schrijvers overlijden oirſpronckelick niet ghecommen te weſen uyt des ſelfs hantſchriften, jeghenwoordich onder ons beruſtende, maer uyt eenighe der voorſchreve vermiſte."

Bedoelde stukken, in 1649 onder Hendrick Stevin berustende, waren:

1) Vande Crychconst.
2) Vanden Huysbau.
3) Spiegeling der Singconst.
4) Byvouch der Singconst.
5) Vande tweede oneventheyt [vereffening] na myn gevoelen.

6) Vande Metaelprouf.
7) Verrechting van Domeine.
8) Nederduytsche Dialectica.
9) Nederduytsche Retorica.
10) Nederduytsche Dichtconst.

Nos. 1 en 2 zijn grootendeels door Hendrick Stevin in de Materiæ Politicæ opgenomen; een deel van het 6e boek, Van aldervolmaecste Cammen en Staven, en het 11e boek, Vanden Handel der Waterschuyring, in diens Wisconstich Filosofisch Bedryf zijn eveneens aan No. 2 ontleend. De Koninklijke Bibliotheek te 's-Gravenhage bezit van Nos. 1 en 2 een fraai afschrift in drie deelen van 40, 87 en 98 pp. 2°., door Hendrick Stevin aan Prins Frederik Hendrik aangeboden.

Nos. 3 en 4 zijn door Bierens de Haan in de Bibliotheek der Koninklijke Akademie van Wetenschappen teruggevonden en uitgegeven, tegelijk met een handschrift Vande Molens, in onze lijst niet genoemd, dat grootendeels eensluidend is met het 10e boek, Vanden Handel der Watermolens, in Hendrick Stevin's Wisconstich Filosofisch Bedryf.

No. 8 vormt de verbeterde en veranderde kopij van de Dialectike van 1585.

Van Nos. 5, 6, 9 en 10 zijn slechts de Cortbegrijpen bekend, door Hendrick Stevin medegedeeld.

Nu we de titels zoowel van Stevin's in druk verschenen werken als van diens nagelaten handschriften, voor zooverre deze niet verloren zijn gegaan, hebben leeren kennen, moeten we, om er de Problemata Geometrica mede te kunnen vergelijken, even stilstaan bij het 2e stuk van de Wisconstige Gedachtenissen, dat „Vande Meetdaet", d. w. z. over de practijk der meetkunde, handelt en 203 foliobladzijden beslaat.

In het Cortbegryp, dat voorafgaat, deelt Stevin een en ander mede omtrent de eigenaardige inrichting van dit werk:

„Alsoo my beieghent vvas een Meetdaet te beschrijven om sijn Vorstelicke Ghenade hem in te oeffenẽ (die ick daer na deur hem oock verbetert en vermeerdert vant, als int volghende blijcken sal) Soo heb ick overleyt de ghemeenschap tusschen grootheyt en ghetal sulcx te vvesen dat vvat men met d'een doet der ghelijck met d'ander oock can ghedaen worden: Hier uyt heb ick my voorghestelt inde selve Meetdaet een oirden te

volghen lijckformich mette ghene die ghemeenlick by velen inde Telconst gebruyckt vvort: Hoedanich is die? Ten eersten men leerter talletters maken. Ten tvveeden haer vveerde uytspreken of kennen als dit 7 seven te doen, dat 26 sessentvvintich. Ten derden de vier gemeene afcomsten als Vergaren, Aftrecken, Menichvuldighen, en Deelen. Ten vierden de Reghel der Everedenheyt. Ten vijfden de Reghel der everedelicke deeling. Ten sesten de Verkeering der gebrokens tot een gemeen noemer, vvaer deur sy bereyt vvorden om daer mede te vvercken gelijck men met heele ghetalen doet.

VVelcke oirden na t'ghemeen oirdeel natuerlick ende bequaem in ghetalen sijnde, vvaer deurmen een ghemeene gront crijcht, tot afveerdiging van veel Telconstighe verschillen ons dickvvils ontmoetende. Soo sullen vvy der ghelijcke met grootheyt in dese Meetdaet volgen, achtende alsoo in vveynich ghe schrift veel stof te begrijpen ende een ghemeene gront te legghen, vvaer deur den ghenen die verstaende, veel Meetconstighe verschillen hem te vooren commende sal connen afveerdigen. VVij sullen dan eerst beschrijven der grootheden Maecksel of teyckening. Ten tvveeden de manier om haer vveerde uyt te spreken of kennen, als door meting haer begrijp te vinden. Ten derden de vier ghemeene afcomsten als Vergaren, Aftrecken, Menichvuldighen, en Deelen. Ten vierden de Reghel der Everedenheyt. Ten vijfdē de Regel der everedelicke snyding. Ten sesten de verkeering, te vveten onghelijcke grootheden tot gelijcke, om daer mede te vvercken soomen met gelijcke doet, daer af beschrijvende ses verscheyden boucken. Ende alsoo de grootheyt drie afcomsten heeft, namelick lini, vlack, en lichaem, soo sal elck bouck drie deelen hebben; T'eerste van linien, Het tvveede van vlacken: Het derde van lichamen, ende elck deel sijn noodige voorstellen: Noch vervoughende daer de gheleghentheyt voordert, beneven de Meetconstighe vverckinghen door grootheden, oock haer vverckinghen door ghetalen, vvelcke inde daet, hier eens voor al gefeyt, sekerder sijn dan de vvisconstighe door de grootheden self; Hoe vvel nochtans de vvisconstighe ghemeenlick gront ende oirsaeck sijn, vvaer uyt de vvercking door ghetalen gheformt vvort."

De Meetdaet bestaat dus uit zes boucken:

1) van het teyckenen der grootheden;
2) van het meten der grootheden;

3) vande vier afcomsten als vergaring, aftrecking, menichvulding, en deeling der grootheden;

4) vande everedenheyts reghel der grootheden;

5) vande everedelicke snyding der grootheden;

6) van t' verkeeren der grootheden in ander formen;

en daar de grootheden linien, vlacken en lichamen kunnen zijn, is ieder bouck verdeeld in drie deelen.

Voor de bewijzen van de toegepaste regels wordt meestal naar Euclides en Archimedes verwezen.

Bij het teyckenen en meten der grootheden wordt, zooals van een practicus als Stevin te verwachten was, de Werkdadige Meetkunst niet vergeten: we leeren twee punten door een rechte lijn verbinden door middel van de rechte rije, de ſlachlijn, de baeck en het meterſcruys; een loodlijn oprichten en neerlaten op een rechte lijn door middel van den leughenſwee, den winckelhaeck en het meterſcruys; een hoek maken even groot als een gegeven hoek door middel van het meterſcruys, voorzien van traprondt [graadverdeeling] en ſichtrije; — we worden geoefend in het gebruik van de keten en de roe bij het landtmeten; van het hangſnoer, het waterpas, het hanghende rondt en de drieroe (triquetrum) bij de bepaling van onghenakelicke langhden, als daar zijn de afstand van een paar ontoegankelijke punten, de hoogte van verwijderde torens, van dijken, wallen, bolwerken, enz.

Behalve loodlijnen en evenwijdigen leeren we in het 1e boek construeeren den cirkel, de ellips, de doorsnede van een omwentelingskegel en -ellipsoïde met een plat vlak, de spiraal van Archimedes, een kromme lijn, een veelhoek en een veelvlak, gelijkvormig met een gegeven kromme lijn, een gegeven veelhoek en een gegeven veelvlak, alsmede de netwerken van de vijf regelmatige en van acht halfregelmatige veelvlakken.

Bij de constructie van de ellips op gegeven assen bedient Stevin zich:

1) van de stelling, dat elk punt van een rechte lijn een ellips beschrijft, als twee van haar punten zich langs twee elkander rechthoekig snijdende rechte lijnen bewegen, waarbij het beschrijvende punt op een der verlengsels van de verbindingslijn der vaste punten wordt aangenomen;

2) van de bepaling der ellips;

3) van de stelling, dat de doorsnede van den mantel van een omwentelingscylinder met een plat vlak een ellips is.

Ook leert Stevin in een ellips de assen construeeren, alsmede, door omkeering van de constructie, onder 1) bedoeld, de eene as uit de andere as en een boog.

Bij de constructie, onder 3) bedoeld, alsmede bij die van de doorsnede van een omwentelingskegel en -ellipsoïde met een plat vlak, neemt Stevin een vlak, dat door de as loodrecht op het snijvlak aangebracht is, als vlak van teekening aan en bepaalt, evenals in de Beschrijvende Meetkunde, punten van de doorsnede door middel van hulpvlakken, die rechthoekig op de as staan.

In de boeken, die volgen, vindt men de werkstukken meerendeels „door berekening" opgelost, zooals wij gewoon zijn ons uit te drukken; de constructie van de algebraïsche vormen, waartoe wij zouden geraken, maar die door Stevin niet worden opgeschreven, berust op de constructie:

1) van de derde evenredige tot twee gegeven rechte lijnen;

2) van de vierde evenredige tot drie gegeven rechte lijnen;

3) van de middelevenredige tusschen twee gegeven rechte lijnen;

4) van de twee middelevenredigen tusschen twee gegeven rechte lijnen „na de vondt van Hero waer af t'bewijs ghedaen is van Eutochius inde uytlegging des 2 boucx vanden cloot en de ſeul van Archimedes";

werkstukken, die het 1ᵉ deel van het 4ᵉ boek vormen, alsmede op de stelling van Pythagoras.

De constructie van twee middelevenredigen (die met passer en liniaal niet uitvoerbaar is) wordt in de Stereometrie toegepast bij werkstukken, die beantwoorden aan werkstukken in de Planimetrie, waarbij de constructie van één middelevenredige tot het doel leidt.

Moet er bv. een veelvlak geconstrueerd worden, dat gelijkvormig is met twee gegeven gelijkvormige veelvlakken en even groot als hun som en zijn a en b twee gelijkstandige lijnen van de gegeven veelvlakken, dan is $\sqrt[3]{(a^3 + b^3)}$ de gelijkstandige lijn van het gevraagde veelvlak, die men bepaalt, door na elkander te construeeren: 1) de derde evenredige b^2/a tot a en b; 2) de derde evenredige b^3/a^2 tot b en b^2/a; 3) de som $a + b^3/a^2$ van a en b^3/a^2; 4) de twee middelevenredigen

$\sqrt[3]{a^2(a + b^3/a^2)} = \sqrt[3]{(a^3 + b^3)}$ en $\sqrt[3]{a(a + b^3/a)^2}$ tusschen a en $a + b^3/a^2$.

In het bijzonder handelt het 3ᵉ boek over de optelling, de aftrekking, de vermenigvuldiging (met een meetbaren vermenigvuldiger) en de (verhoudings-) deeling van rechte lijnen, cirkelomtrekken, gelijkvormige platte vlakken en gelijkvormige lichamen;

het 4ᵉ boek, behalve over de reeds genoemde werkstukken, over de constructie:

1) van een rechte lijn bij een gegeven rechte lijn, zóó dat deze zich verhouden als twee gegeven gelijkvormige platte vlakken (lichamen);

2) van een plat vlak (lichaam) gelijkvormig met een gegeven plat vlak (lichaam), zóó dat deze zich verhouden als twee gegeven rechte lijnen;

3) van de gelijkvormige derde evenredige tot twee gegeven gelijkvormige platte vlakken (lichamen);

het 5ᵉ boek over de evenredige verdeeling:

1) van rechte lijnen, alsmede over de wijze, waarop „eenighe uyrwerckmakers haer raeyerkens in ſeer even ghedeelten teyckenen", door de verdeeling van een grooten cirkel „tuychvverckelick" op een kleinen concentrischen cirkel over te brengen;

2) van veelhoeken door een rechte lijn:

a) uit een gegeven punt in den omtrek;

b) uit een willekeurig gegeven punt;

c) evenwijdig aan een gegeven rechte lijn;

werkstukken, die „inde daet haar merckelick ghebruyck" hebben, „als onder anderen om landen in begeerde cavels of ſticken te deelen";

3) van prisma's en pyramiden door platte vlakken:

a) overeenkomstig die onder 2, *c*);

b) evenwijdig aan het grondvlak;

en het 6ᵉ boek over de vormverandering der figuren, o. a. over de constructie van een veelhoek (veelvlak), gelijkvormig met een gegeven veelhoek (veelvlak) en gelijk aan een ander gegeven veelhoek (veelvlak).

Ik wil dit beknopt overzicht van den inhoud der Meetdaet niet eindigen, zonder er op te wijzen, dat Stevin, voor wien onze taal de „aldercierlickſte, alderrijckſte, ende aldervolmaectſe Spraecke der Spraecken" is, zich in dit werk, evenals elders,

uitsluitend van Nederlandsche termen bedient. Hij spreekt van driehouck, vierhouck, enz., veelhouck en ghefchikte [regelmatige] veelhouck; van viercant, rechthouck, ruyt, fcheefruyt en bijl [trapezium, aldus genoemd naar den vorm der eettafels bij de Grieken — Gr. τράπεζα = tafel, van τετράς = vier en πέζα = voet; — Stevin verkiest den term „bijl" boven den meer gebruikelijken „mensa" — Lat. mensa = tafel — „omdat de vierhouck met twee evewijdeghe ende twee onevewijdighe fijden (anfiende de bijlen en tafels foomenfe nu gemeenelick maeckt) beter een bijl dan een tafel gelijckt"]; van rondt, halfmiddellijn, halfmiddellijndeel [sector] en peezdeel [segment]; van lanckrondt [ellips], brantfne [parabool, en brander, omwentelingsparaboloïde, omdat „dier formen daet voornamelicxt bestaet int ontsteken ofte branden"], waffendefne [hyperbool] en flangtreck [spiraal van Archimedes]; van plat en bultich vlack; van rechtlinich plat en plattich lichaem; van pylaer, naelde, feul, keghel, ghecorte keghel, cloot, halfmiddellijnfne eens cloots [bolsector] en coordfne eens cloots [bolsegment]; van clootfche [omwentelingsellipsoïde] en keghelfche [omwentelingsparaboloïde en -hyperboloïde]; van ghefchickte en ghefchickte ghefneen lichamen [regelmatige en halfregelmatige veelvlakken]; van fchilbooch [complement] en halfrontvervulling [supplement]; van houckmaet [sinus], fchilboochs houckmaet [cosinus], raecklijn [tangens] en fnylijn [secans].

Behalve bij Cantor [1]) vond ik Stevin's Problemata Geometrica vermeld bij Van Roomen [2]), Hendrick Stevin [3]), Goethals [4]), Steichen [5]), Quetelet [6]) en Bierens de Haan [7]), alsmede in de

---

1) Cantor, t. a. p., II p. 528.

2) Van Roomen, Ideae Mathematicae Pars Prima, sive Methodus polygonorum qua laterum, perimetrorum et arearum cuiuscunque polygoni inuestigandorum ratio exactissima et certissima vna cum circuli quadratura continentur, Antwerpen 1593 en Leuven 1593, Voorrede.

3) Hendric Stevin, Wisconstich Filosofisch Bedryf, Leiden 1667, I Boec, pp. 3—4.

4) Goethals, Notice Historique sur la Vie et les Travaux de Simon Stevin, de Bruges, Brussel 1842, pp. 5 en 62.

5) Steichen, Mémoire sur la Vie et les Travaux de Simon Stevin, Brussel 1846, pp. 6, 100—103 en 190—197.

6) Quetelet, Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques chez les Belges, Brussel 1864, p. 167 Noot.

7) Bierens de Haan, t. a. p., pp. 186—187 en 214—215.

bibliographieën van Andreas [1]), Sweertius [2]), Vossius [3]), Foppens [4]), Bayle [5]), Jöcher [6]) en Vander Haeghen [7]).

Adriaan van Roomen (Romanus, geb. 1561 te Leuven, overl. 1615 te Mainz), medicus en wiskunstenaar, deelt in zijn Idea Mathematica, waarin de verhouding van den omtrek van een cirkel tot zijn middellijn in vijftien decimalen benaderd wordt, een en ander mede omtrent de voornaamste mathematici van zijn tijd. Van Stevin zegt hij:

„Simon Stevinus Brugensis vir certè supra communem omnium captum, in Mathesi versatus Arithmeticam absoluta methodo Gallicè conscriptam, in lucem emisit, ac talem quidem, ut si nihil aliud ab eo expectaretur, jam omnibus satis se mundo fuisse utilissimum declarasset; in ea etenim Arithmeticae vulgaris atque etiam figuratae seu Cossicae regulas, in pulchriorem quam hactenus ab ullo factum sit, ordinem digessit, praxin subjungit, Diophantum illustravit, Euclidis totum librum decimum, qui est de incommensurabilibus quantitatibus, paucissimis propositionibus comprehendit, plurimaque alia complectitur rara lectuque dignissima. Huic Arithmeticae confinem Geometriam universam simili ordine et methodo, similibusque regulis scribere conatur, cujus exiguam quandam portionem in libris quinque problematum Geometricorum exhibuit. Nec iis contentus fuit, sed praeterea nobilissimam et abstrusissimam eam matheseos partem quae Staticè dicitur, non modo instauravit illustravitve, sed è fundamentis verissimis, longaque experientia confirmatis, de novo extruxit, linguaque Belgica pura et nitida (quam linguarum omnium totius orbis docet esse principem) conscriptam in lucem emisit: cui operi quid statui possit par non video. Is vir adeo rei ponderariae peritus est, ut nullum ei offerri

1) Andreas, Bibliotheca Belgica, Leuven 1623, p. 719, en Leuven 1643, p. 813.

2) Sweertius, Athenæ Belgicæ, Antwerpen 1628, p. 677.

3) Vossius, De quatuor Artibus Popularibus, de Philologia, et Scientiis Mathematicis, Amsterdam 1660, p. 336.

4) Foppens, Bibliotheca Belgica, Tomus II, Brussel 1739, p. 1102.

5) Bayle, Dictionaire Historique et Critique, Tome IV, Amsterdam, Leiden, Den Haag, Utrecht 1740, p. 279.

6) Jöcher, Allgemeines Gelehrten-Lexicon, 4ter Theil, Leipzig 1751, p. 836.

7) Vander Haeghen, Bibliotheca Belgica, Tome XXIII, Gent en 's-Gravenhage 1880—1890, S 125.

valeat pondus, quantumcunque grave, quod non parvis viribus, facilique instrumento Pantocratore movere possit. Hinc in regionibus maritimis, machinarum quibus terra à mari defendatur, praefectus est constitutus; quod munus eum magna cum laude, omniumque admiratione obire intelligo." [1])

Omstreeks 1593, toen de Idea Mathematica verscheen, zou Stevin zich dus hebben bezig gehouden met de samenstelling van een werk over meetkunde, waarvan hij in zijn vijf boeken Problemata Geometrica reeds een proeve had geleverd (cujus exiguam quandam portionem in libris quinque problematum Geometricorum exhibuit) en dat naar het voorbeeld van zijn Arithmetique van 1585 zou worden ingericht (simili ordine et methodo, similibusque regulis).

Hendrick Stevin en Quetelet, naar wien Cantor verwijst, citeeren Van Roomen's lofspraak op Stevin.

„Waer in dan ons by geval ter hant quam", aldus Hendrick Stevin, „hoe den vermaerden Wiſconſtenaer en Geneesheer Adrianus Romanus Lovanenſis in ſijn boec genaemt *Ideæ Mathematicæ pars prima*; *Sive Methodus Poligonorum*. *&c. anno* 1593, (beſig ſynde den leſer ettelicker voornaemſte Geleerde ſijns tijts beſondere wetenſchappen aen te tekenen) van ons Vader aldus uytvoer: *Simon Stevin van Brugge, een man, ſeker boven het begrip van allen, inde wiſconſten geoeffent, heeft in volmaeckter oirden en Franſche tael int licht gebracht de Telconſt, ſulx dat, in geval ſchoon niet anders van hem verwacht en wiert, hy nu van yder mocht geſeyt worden, der werelt ten hoogſten nut geweeſt te hebben; Want inde ſelve ſtelt hy de gemene Telconſtige en ſtelregelſche regelen in deftiger oirden als tot noch toe van yemant gedaen is, en voughter de Teldaet by, verklaert Diophantus, vervanght het geheele thiende boec van Euclides, twelc van de onmeetbare grootheden is, in ſeer weynig voorſtellen, ende begrijpter veel ander beſonder ende ganſch leeſweerdige ſtucken in. Tot deſe Telconst pijnt hy ſich, de gemene Meetconſt, in gelijker oirden en Regels te beſchryven, vant welc hy ſeker kleyn deel inde vijf boecken der Meetconſtige voorſtellen heeft verthoont. Noch daer en heeft hy het niet by gelaten, maer heeft bovendien niet alleen weerom opgerecht, ofte bekent gemaect dat alderedelſte*

[1]) Dit uittreksel werd mij vanwege de Bibliothèque Royale de Belgique te Brussel op mijn verzoek welwillend verstrekt.

en alderverborgenste deel der Wisconsten, de Weegconst genaemt, maer heeft die uyt seer vvarachtige gronden, deur langdurige ervaringe bevestlicht, van nieus opgetimmert, en in puere suyvere Nederduytsche tael (die hy aenvvijst, aller Talen des Eertbodems Prince te vvesen) beschreven, in het ligt gebracht: Welc werx vveerga, 't sy oock vvatter voorgestelt kan vvorden, ic niet en sie. Die man is der mate inde wichtige saken ervarz, dat hem geen gewicht can ontmoeten, hoe svvaer 'tooc zy, dat hy niet met kleyne macht en slecht reetschap can bevvegen. Hierom is het, dat hem in an Zee gelege lantschappen, de opsicht bevolen is over de reetschappen, door welke het lant tegen de Zee, beschermt wort; vvelc ampt ic versta, dat hy met grooten lof en vervvondering van allen uytvoert."

„Maer wat mocht doch die man dan wel gesegt willen hebben", roept Heer Hendrick in vervoering uit, „so hy de wisconstige gedachtenisse, De Sterctebou, de Legermeting, De nieuwe manier van Sterctebou deur spilsluysen, alle deur hem in Nederduyts geschreven en deur andere vermaerde mannen int latijn overgeset, gesien had. Ja hoe mocht hij dan wel gekreten hebben, so hem het boec der Burgerlicke stoffen voorgecommen waer? En daer toe noch het geen wy van hem in dit ons bedrijf te pas sullen brengen? ende bovendien het geen van hem onder ons noch in geschrift en naar ons sin vergaert legt? Ia soder dan noch by quam, 'tgeener deur onachtsaemheyt, naer sijn doot, uyt ontleent en niet weer te recht gecomen is? Want hy [Van Roomen] scheen de dingen sonder aensien van persoon of taelkundigheyt alleen na waerdy op te nemen, so gy int selve boec aen 't uytmeten des wisconstigen talents van den duytsklerkigen leec Ludolf van Collen sien cont." (pp. 4—5)

Omtrent den inhoud der Problemata Geometrica deelen zoomin Goethals en de aangehaalde bibliografen als Van Roomen, Hendrick Stevin en Quetelet bijzonderheden mede; Bierens de Haan bepaalt zich tot een opgaaf van den titel en de opschriften van de vijf boeken; Steichen daarentegen geeft een beknopt overzicht van den inhoud van elk boek en uittreksels uit het 1e en het 3e boek: „Il est déplorable de voir l'histoire des sciences rester muette encore une fois sur ce beau travail", zoo laat hij zich op p. 102 uit: „nous n'en avons pu donner qu'une idée; vouloir l'analyser d'une manière satisfaisante, ce serait

se condamner à le traduire à peu près en entier ou à le copier".

Van Roomen ontleent zijn mededeelingen omtrent een door Stevin uit te geven Geometria Universa aan de Problemata Geometrica zelf, waarin de schrijver meermalen van een werk over meetkunde gewaagt, dat hij eerlang hoopt te laten verschijnen; in dit werk zal hij de methode der rekenkunde toepassen en o. a. over de optelling, de aftrekking, de vermenigvuldiging, de deeling en de evenredigheid van lijnen, vlakken en lichamen handelen, evenals hij zich reeds in het 2e boek van de Problemata Geometrica van de regula falsi der rekenkunde als „regula falſi continuæ quantitatis" bij de oplossing van meetkundige werkstukken bedient [1]).

Met dit werk over meetkunde wordt de Meetdaet bedoeld, die als 2e stuk van de Wisconstige Gedachtenissen in 1605, dus ruim twintig jaren na de Problemata Geometrica, het licht zag. Dit blijkt genoegzaam uit de inrichting der Meetdaet, die beantwoordt aan Stevin's voornemen, op p. 38 van de Problemata Geometrica uitgedrukt, om zijn Geometria samen te stellen „in Methodum Arithmeticæ methodo ſimilem". De vertraging in de uitgaaf dier Geometria, door Stevin in de Problemata Geometrica als op handen voorgesteld, laat zich m.i. aldus verklaren:

Tijdens de samenstelling van de Problemata Geometrica moet Stevin met arbeid overladen zijn geweest. Immers in 1585

---

[1]) Qvoniam geometriam (quam breuiter ſperamus nos edituros) in Methodum Arithmeticæ methodo ſimilem digeſſimus (quod naturalis ordo videtur requirere propter magnam convenientiam continuæ & diſcontinuæ quantitatis vbi quodcunque genus magnitudinis, vt ſunt linea, ſuperficies, corpus, per quatuor ſpecies, vt Additionem, Subtractionem, Multiplicationem & Diuiſionem, præterea per regulas, vt proportionum &c. tractabimus) offerebat ſe quoque ex ordine Problema quoddam, vbi per falſam poſitionem veram ſolutionem petitam Geometricè inveniremus. p. 38.

Reliquos modos qui per inſtrumenta expediuntur, in nostra Geometria ſuis inſtrumentis accommodatis breuiter ſperamus nos edituros. p. 85.

Chordæ ſegmentum ſphærale vocamus partem ſphæræ plano à ſphæra ſectam, ratio huius appellationis vna cum ratione nominis diametralis ſegmenti ſphæralis in noſtra Geometria dicetur. p. 89.

de quorum omnium constructione in noſtra Geometria abunde dicetur. p. 91.

(quarum deſcriptionum Problemata in nostra Geometria ordine collocabimus). p. 100.

verschenen de Bewysconst, de Thiende, de Arithmetique en de Pratique d'Arithmetique, en in 1586 de Beghinselen der Weeghconst, de Weeghdaet en de Beghinselen des Waterwichts; de Arithmetique en de Pratique d'Arithmetique werden in het Fransch uitgegeven, de Geometria zou, vermoed ik, evenals de Problemata Geometrica, in het Latijn worden bewerkt. Maar men wist Stevin te bewegen zijn geschriften over wiskunde voortaan in de „Duytſche tael" te laten verschijnen. Immers in de opdracht van zijn Bewysconst aan de „Neerduytschen" laat hij zich (pp. 4—6) aldus uit: „... nadien ſommighe mijn ſeer ghemeene vrienden ende Landtſlieden, in ander Spraecken onervaren, nochtans der Conſten uytnemende liefhebbers, verſtaen hadden, dat wy yet der Mathematiken inden druck ſouden doen afveerdighen, maer in vreemder talen, en hebben my (hoe wel mocht yemandt ſegghen niet begheerens weert) niet ſlichtelick ghebeden ſulcx inde onſe oock te doen, maer bycans met redenen willen overtuygen geen behoorlicke gheneghentheyt te draghen, tot onſen Vaderlande, diens voorderinghe nochtans, elck naer zijn uyterſte vermoghen, boven vrienden en maghen, ja voor ſijn eyghen ſelfs, is ſchuldich te beneerſtighen; dit ſoo beleydende ende voortdringende, dat en hadde ick t'mijnder bate niet ghehadt, de ghemeene maniere van doen, ofte de Ghewoonte, die niet t'onrecht d'ander Natuere, gheſeyt wort, ſwaerlick ſoude ick my ontſchuldicht hebben: Ten eynde hun niet alleene belovende naer mijn vermoghen in haerlieder begheeren te voldoen, maer my ſelfs door eenen yver daer toe verbonden achtende, hebbe my beneerſticht 'tſelve totter Daet te brenghen: Maer ſiende dat ſich daer in ontmoete Dialectike ſtijl, Spreucken, ende VVoorden, die ſij Vocabula Artium noemen, welcke (naer de maniere der gheenre dieſe int Duytſch gebruycken) ghenoemt op ſijn Latijnſche, den onervarenen dier Talen ſoo duyſter vallen, datſe de ſaecke niet grondelick verſtaen en connen, oock mede dat int Neerduytſch hare beteeckeninghe onbekent blijft, overmidts de Dialectike daer in noch niet beſchreven en is: Soo vandt ick my bycans als bedwonghen, voor het uytgeven dies voorſeyt is, deſe Duytſche Dialectike af te veerdighen".

De Arithmetique en de Pratique d'Arithmetique waren evenwel, zoo stel ik mij de zaak voor, reeds te ver gevorderd,

dan dat aan den wensch van Stevin's vrienden kon worden voldaan, maar de Geometria zou worden omgewerkt en dit werd de oorzaak, dat dit werk voorloopig bleef liggen: de zooveel belangrijker Weeghconst, Weeghdaet en Waterwicht namen al Stevin's tijd in beslag.

Eerst omstreeks 1592, toen hij met Prins Maurits in aanraking kwam, werd het manuscript der Geometria weer door Stevin ter hand genomen, doordat hem „beieghent vvas een Meetdaet te beſchrijven om ſijn Vorstelicke Ghenade hem in te oeffenẽ" 1). Met de overige „onghedructe VViſconſtige gedachteniſſen" 2) werd de Meetdaet door den Prins op al zijn tochten medegenomen, „niet ſonder perikel van te meughen verloren vvorden, te meer dat die reyſen de crijchfortuynen gemeenelick ondervvorpen vvarẽ" 2). Het was juist de vrees, dat „ſulck ongheval daer over quaem" 2), die tot de uitgaaf deed besluiten, te beginnen met de Meetdaet, die Stevin „deur ſijn Vorstelicke Ghenade oock verbetert en vermeerdert vant" 1).

De Problemata Geometrica worden door Stevin nergens aangehaald, zelfs niet in zijn Meetdaet, hoewel in dit werk, zooals nader zal blijken, de inhoud van de Problemata Geometrica grootendeels, vermeerderd en verbeterd, teruggevonden wordt, waarom de vijf boeken Meetkundige Werkstukken door Girard dan ook niet in diens overigens volledige uitgaaf van de Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin zijn opgenomen.

Zonder twijfel hebben deze oorzaken met de zeldzaamheid der Problemata Geometrica samengewerkt, om Stevin's eerstlingsarbeid over meetkunde in vergetelheid te doen geraken. De toenmalige bibliothecaris van de stad Brussel, Goethals, schijnt de eerste geschiedvorscher te zijn geweest, door wien er (in 1842) opnieuw de aandacht op gevestigd werd 3); pas een halve eeuw later (in 1892) vindt men er voor de eerste maal — voor zoover ik heb kunnen nagaan — door een historiograaf buiten België en Nederland (Cantor) melding van gemaakt. Hoe evenwel Cantor, die o.a. Steichen en Quetelet

1) Cortbegryp der Meetdaet.

2) Voorreden der Wisconstige Gedachtenissen.

3) Cet ouvrage . . . aurait échappé à notre attention, sans la mention qui en est faite dans la brochure de M. Goethals. Steichen, t. a. p, p. 100.

als zijn bronnen citeert, op grond van de omstandigheid, „dass in der lateinischen Ausgabe von 1605—1608 [de Hypomnemata Mathematica], welche in manchen Dingen von der französischen Ausgabe [Girard's Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin] sich unterscheiden soll, und welche namentlich eine Abtheilung De miscellaneis besitzt, welche dort ganz fehlt, auch ein Verzeichniss von Schriften sich findet, welche hätten abgedruckt werden sollen, aber vom Herausgeber noch nicht druckfertig gestellt werden konnten und desshalb vorläufig zurückgelegt wurden" [1]), de mogelijkheid kan veronderstellen, „dass jene erste geometrische Schrift [de Problemata Geometrica] für uns gänzlich verloren gegangen wäre" [1]), dit moet ik verklaren niet te begrijpen.

Evenmin ben ik te weten kunnen komen, op wiens gezag Cantor het jaar der uitgaaf van de Problemata Geometrica op 1585 vaststelt [1]), waar alle bronnen, die ik heb kunnen raadplegen, van Andreas (1623) af tot Vander Haeghen (1880--1890) toe, eenstemmig als zoodanig 1583 opgeven. De Problemata Geometrica zelf verschaffen omtrent dien datum nergens inlichtingen: de titel vermeldt wel Antwerpen als plaats van uitgaaf, maar geen jaartal; evenmin zijn de opdracht en de narede gedateerd. Alleen blijkt uit een opmerking van Stevin, dat het werk van ouder dagteekening is dan de Arithmetique van 1585 (met Privilegie van 20 December 1584): vermoedelijk zal de datum 1583, door Andreas, een tijdgenoot van Stevin, opgegeven, dus wel de juiste wezen.

Bedoelde opmerking, die op p. 9 van de Problemata Geometrica voorkomt, houdt in, dat Stevin de meening deelt van hen, die onmeetbare wortels getallen noemen, over welke quæstie hij zegt breeder te zullen uitweiden in zijn Algebra [2]), waaronder de in 1585 verschenen Arithmetique moet worden verstaan.

Inderdaad vindt men in dit werk op pp. 33—37 de stelling verdedigd: „Qv'Il Ny A Avcvns Nombres Absvrdes, Irrationels, Irreguliers, inexplicables, ou fourds". „Finalement", zoo besluit Stevin dit pleidooi, „ce que nous n'auons fatiffaict en cefte

---

[1]) Zie de aanhaling op pp. 99—100.

[2]) (fumus autem in fententia illorum qui radices inexplicabiles numerum vocant, de quo aliàs in noftra Algebra latiùs dicetur). p. 9.

matiere par les argumens precedens, nous l'accomplirons contre tous aduerſaires, par la 4ᵉ theſe [1]) de noz theſes Mathematiques", die, zeven in aantal, op pp. 202—203 van de Pratique d'Arithmetique worden medegedeeld: „L'heure & lieu de leur expedition ſe declairera à temps oportun" (p. 203).

Stevin droeg zijn Problemata Geometrica op aan Maximiliaan van Cruiningen (1555—1612), burggraaf van Zeeland en Generaal der Artillerie in Statendienst, een ambt, dat hij als katholiek onder Leicester's bewind moest neerleggen. „Zoo wij mochten vernemen, dat deze werkstukken U bevallen", aldus Stevin in zijn narede tot den Heer van Cruiningen, „dan zullen wij eenige andere geheimen der wiskunde [van Weeghconst en Waterwicht waarschijnlijk], door ons onthuld, eveneens onder bescherming van Uw naam bekend maken" [2]), waarvan evenwel niet gekomen is.

Stevin's Problematum Geometricorum Libri V, waarvan ik den inhoud thans boek voor boek ga beschrijven, beslaan 119 pp. klein-quarto en handelen:

1) over de verdeeling van veelhoeken in gegeven verhouding:

a) door een rechte lijn uit een punt in den omtrek;

b) door een rechte lijn evenwijdig aan een der zijden; (33 pp.)

2) over de toepassing van de regula falsi bij de oplossing van meetkundige werkstukken; (8 pp.)

3) over de vijf regelmatige veelvlakken, de vijf vermeerderde regelmatige veelvlakken en de negen afgeknotte regelmatige veelvlakken, die in een bol beschreven kunnen worden; (38 pp.)

4) over de constructie van een meetkundig lichaam, gelijkvormig met een gegeven meetkundig lichaam en gelijk aan een ander gegeven meetkundig lichaam; (18 pp.)

---

1) Qu'il n'y à aucuns nombres abſurds, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou ſourds. Pratique d'Arithmetique, p. 202.

2) Epilogus.

Hæc ſunt Generoſiſſ. D. quæ tibi dicare deſtinauimus, quæ ſi A. T. grata eſſe ſentiemus, alia habemus Matheſium arcana ſub tui Nominis auſpicijs proditura: Interim hæc qualiacunque boni conſules. Vale. Ego tibi me quam officioſiſſimè commendabo Lugduni Batauorum [alwaar Stevin van 1581—1590 verblijf hield]. p. 119.

5) over de constructie van een meetkundig lichaam, gelijkvormig met twee gegeven gelijkvormige meetkundige lichamen en gelijk aan: *a*) hun som; *b*) hun verschil. (17 pp.)

Wat de toegepaste stellingen aangaat, wordt uitsluitend verwezen naar Euclides' Elementen (ed. Clavius, Keulen 1574).

Aan de behandeling van de werkstukken in het 1e boek laat Stevin een beknopt overzicht (13 pp.) over verhoudingen en evenredigheden voorafgaan, dat men, in hoofdzaak onveranderd, als „Troisiesme Partie Des Definitions De La Raison Et Proportion Arithmetique, & de leurs dependances" op pp. 55—70 van zijn Arithmetique terugvindt.

Het behoeft nauwelijks gezegd te worden, dat dit overzicht naar het 5e boek van Euclides' Elementen bewerkt is, dat uitsluitend over verhoudingen en evenredigheden handelt (met diens aanteekeningen 91 pp. in de ed. Clavius) en, wat zijn wezenlijken inhoud aangaat, van Eudoxus, een leerling van Plato, afkomstig schijnt te wezen.

Er zijn verhoudingen (redens) van twee termen (rationes binariæ), van drie termen (rationes ternariæ), enz. Verhoudingen van twee termen kunnen meetbaar (explicabilis) en onmeetbaar (inexplicabilis) wezen. Meetbare verhoudingen van twee termen heeten verhoudingen van gelijkheid (rationes æqualitatis), als ze $= 1$ zijn, en verhoudingen van ongelijkheid (rationes inæqualitatis), als ze $\neq 1$ zijn, in het bijzonder van grooter ongelijkheid (majoris inæqualitatis), als ze > 1, en van kleiner ongelijkheid (minoris inæqualitatis), als ze < 1 zijn. Verhoudingen van grooter ongelijkheid noemt men enkelvoudig (simplex), als zij < 2, en samengesteld (composita), als zij $\geqq 2$ zijn. Enkelvoudige verhoudingen heeten superparticularis, als de 1e term éénmaal den 2en term en één onderdeel van den 2en term bevat, en superpartiens, als de 1e term éénmaal den 2en term en eenige onderdeelen van den 2en term bevat. En samengestelde verhoudingen heeten multiplex, als de 1e term eenige malen den 2en term bevat, multiplex superparticularis, als de 1e term eenige malen den 2en term en één onderdeel van den 2en term bevat, en multiplex superpartiens, als de 1e term eenige malen den 2en term en eenige onderdeelen van den 2en term bevat.

Verbeelden k, l en $n > l$ aantallen, grooter dan één, dan

kan men de vijf soorten van verhoudingen van grooter ongelijkheid aldus voorstellen [1]) :

$(n+1):n$ . . . **superparticularis ,**
$(n+l):n$ . . . **superpartiens ,**
$kn:n$ . . . **multiplex ,**
$(kn+1):n$ . . . **multiplex superparticularis ,**
$(kn+l):n$ . . . **multiplex superpartiens.**

---

[1]) Ik bedien mij van de tegenwoordige notatie van verhoudingen en evenredigheden; in de Problemata Geometrica vindt men alleen de uitdrukkingen: ratio A ad B, ratio binaria AB, ratio ternaria ABC, proportio (binaria) ABCD [lees: ut A ad B sic C ad D], proportio ternaria ABC, (ad) DEF, proportio continua ABC, enz.; in de Arithmetique daarentegen noteert Stevin aldus: 6 . 3. — 4 . 2., 5 . 1 . 4 . 7. — 15 . 3 . 12 . 21., enz.

Oughtred (1631) bedient zich bij verhoudingen van de teekens $::$, $\overline{\cdot\cdot}$ en $\underline{\cdot\cdot}$ voor $=$, $>$ en $<$ (overigens van $=$, $\sqsubset$ en $\sqsupset$); een gedurige evenredigheid duidt hij met $\div\!\div$ aan. Zoo schrijft hij:

$$a\,.\,b :: c\,.\,d \text{ voor } a:b=c:d,$$

$$a\,.\,b\,.\,c\,.\,d \div\!\div \text{ voor } a:b=b:c=c:d.$$

Toen evenwel in de 17^e^ en 18^e^ eeuw de stip meer algemeen als decimaal- en als maalteeken in gebruik werd genomen, verdween zij langzamerhand uit de verhoudingen. Niettemin bleef Oughtred's notatie tot in het begin van de 19^e^ eeuw hier en daar stand houden, hoewel men naast $a\,.\,b :: c\,.\,d$ reeds bij Wallis (1685) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ en bij Newton (1763) $a:b::c:d$ aantreft. Volgens Van Swinden (1790) zouden de schrijfwijzen $a:b=c:d$ en $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ van Leibniz afkomstig wezen.

Bij Herigone (1634), die zich van de teekens π, 2|2, 3|2 en 2|3 bedient, om „staat tot", $=$, $>$ en $<$ aan te duiden, vindt men $a:b=c:d$ aldus voorgesteld:

$$a\pi b\,2|2\,c\pi d;$$

De la Hire (1710) noteert:

$$a\,|\,b\,||\,c\,|\,d,$$

en Dilworth (1743):

$$a\;.\;.\;b :: c\;.\;.\;d.$$

Bij reken- en meetkundige evenredigheden en reeksen blijven tot op den huidigen dag de schrijfwijzen:

$$a\,.\,b:c\,.\,d \text{ voor } a-b=c-d,$$

$$a:b::c:d \text{ voor } a:b=c:d,$$

$$\div\, a\,.\,(a+v)\,.\,(a+2v)\;.\;.\;.\;.\;\{a+(n-1)v\},$$

$$\div\!\div\, a:aq:aq^2:\;.\;.\;.\;aq^{n-1},$$

die men bij buitenlandsche schrijvers niet zelden ontmoet, aan Oughtred herinneren.

De verhoudingen van kleiner ongelijkheid kunnen als omkeeringen van die van grooter ongelijkheid worden aangemerkt; zij dragen dezelfde benamingen met voorvoeging van „sub":

$n:(n+1)$ . . . subsuperparticularis,
$n:(n+l)$ . . . subsuperpartiens,
$n:kn$ . . . submultiplex,
$n:(kn+1)$ . . . submultiplex superparticularis,
$n:(kn+l)$ . . . submultiplex superpartiens.

In het bijzonder noemt men de verhoudingen:

1) 3 : 2 . . . sesquialtera, 4 : 3 . . . sesquitertia, enz.;
2) 11 : 9 . . . superbipartiens nonas,
9 : 5 . . . superquarpartiens quintas, enz.
3) 2 : 1 . . . dupla, 3 : 1 . . . tripla, enz.
4) 9 : 4 . . . dupla sesquiquarta,
19 : 6 . . . tripla sesquisexta, enz.;
5) 23 : 5 . . . quadrupla supertripartiens quintas,
74 : 11 . . . sextupla superoctopartiens undecimas, enz.

Evenzoo:

1) 2 : 3 . . . subsesquialtera, 3 : 4 . . . subsesquitertia, enz.;

. . . .

Men kan een verhouding vervormen (transformare), omkeeren (invertere) en verstoren (perturbare).

Een ratio transformata ontstaat, door vormen, die lineair uit de termen van een verhouding zijn samengesteld, te vergelijken, — een ratio inversa, door van een verhouding van twee termen de termen te verwisselen, — en een ratio perturbata, door van een verhouding van n, d. i. minstens drie termen den 2^{en} term met den 3^{en}, den 3^{en} term met den 4^{en}, . . . den $(n-1)^{en}$ term met den n^{en} en eindelijk den 1^{en} term met den 2^{en} te vergelijken.

Men ontmoet dezelfde onderscheidingen, met één vermeerderd, bij de evenredigheden, d. z. gelijkheden van twee verhoudingen van twee, drie, enz. termen (proportiones binariæ, ternariæ, etc.): de 1^{e} termen van de twee redens heeten overeenkomstige termen (termini homologi); evenzoo de 2^{e} termen, enz.

Een proportio transformata ontstaat, door van een evenredigheid de redens op dezelfde wijze te vervormen, — een proportio inversa, door de redens om te keeren, — en een proportio alterna, door de verhoudingen van twee paren overeen-

komstige termen van de redens aan elkander gelijk te stellen. Een proportio perturbata eindelijk levert pas evenredigheden op, als men een der redens verstoort; telt elke reden n, d. i. minstens drie termen, dan staan de 1ᵉ, 2ᵉ, . . . $(n-1)$ᵉ term van de 1ᵉ reden tot elkander als de 2ᵉ, 3ᵉ, . . . nᵉ term van de 2ᵉ reden en de $(n-1)$ᵉ en nᵉ term van de 1ᵉ reden als de 1ᵉ en 2ᵉ term van de 2ᵉ reden.

Van de evenredigheid $9:6=15:10$ bv. is $(9+6):6= =(15+10):10$ een proportio transformata, $6:9=10:15$ een proportio inversa en $9:15=6:10$ een proportio alterna. En de verhoudingen $12:8:4:2$ en $6:3:2:1$ bv. vormen een proportio perturbata, omdat zoowel $12:8:4$ en $6:3:2$ als $4:2$ en $6:3$ een werkelijke evenredigheid (proportio positiva) uitmaken.

De term proportio transformata werd door Stevin ingevoerd, om een veertiental stellingen over evenredigheden, die bij Euclides afzonderlijk vermeld worden, tot één enkele te kunnen samenvatten [1]).

En de proportiones perturbatæ ontleenen haar beteekenis aan de omstandigheid, dat de uiterste termen van de 1ᵉ reden evenredig zijn met die van de 2ᵉ reden (Eucl., Lib. V, Propos. 23). Immers, als a_1, a_2, a_3, . . . a_{n-1}, a_n en b_1, b_2, b_3, . . . b_{n-1}, b_n de redens van een proportio perturbata vormen, dan is $a_1 : a_{n-1} = b_2 : b_n$ en $a_{n-1} : a_n = b_1 : b_2$, waaruit door vermenigvuldiging van de overeenkomstige redens onmiddellijk volgt, dat $a_1 : a_n = b_1 : b_n$ is.

Evenals bij de meeste van zijn tijdgenooten heet bij Stevin een meetkundige reeks een gedurige evenredigheid (proportio continua), omdat van zulk een reeks de 1ᵉ term staat tot den 2ᵉⁿ als de 2ᵉ term tot den 3ᵉⁿ als de 3ᵉ term tot den 4ᵉⁿ, enz.

Bij een gedurige evenredigheid wordt de verhouding van den 1ᵉⁿ term tot den 3ᵉⁿ 2-maal zoo groot genoemd als die van den 1ᵉⁿ term tot den 2ᵉⁿ; die van den 1ᵉⁿ term tot den 4ᵉⁿ 3-maal zoo groot, enz.

Door uitbreiding van dit begrip ontstaan de vier bewerkingen

---

[1]) Nota.

Hac definitione transformatæ proportionis conceſſa, ſuperflua videntur theoremata 1.2.3.4.5.6.12.15.17.18.19.20.22.& 24. lib. 5. Euclid. quæ omnia cùm multis alijs ſimilibus (cùm omnia ſub hac vnica definitione comprehendantur) in vno theoremate poſſent explicari. p. 16.

met verhoudingen, de optelling, de aftrekking, de vermenigvuldiging en de deeling, die in de muziekleer en de gezelschapsrekening toepassing vinden.

Stevin behandelt de „quatre computations des Raiſons” op pp. 14—27 van zijn Pratique d'Arithmetique. „Et par les precedens [verklaringen] ſ'entendra”, zegt hij, „que Raiſon $\frac{3}{2}$ aiouſtée à Raiſon $\frac{4}{3}$, faict Raison $\frac{2}{1}$, c'eſt à dire en ſons, que la quinte auec la quarte, faict l'octaue, & ainſi des autres” (p. 17) en „que de Raiſon $\frac{3}{2}$ ſoubſtraict Raison $\frac{4}{3}$, reſte Raiſon $\frac{9}{8}$, c'eſt à dire en ſons, que de la quinte ſoubſtraict la quarte, reſte la ſeconde, de laquelle les termes ſont en Raiſon $\frac{9}{8}$, & ainſi des autres” (p. 18), want „addition des Raiſons ne requiert autre operation que la multiplication des rompuz” [breuken] (p. 17) en „ſoubſtraction des Raiſons ne requiert autre operation que diuiſion des rompuz” (p. 18).

Evenzoo levert de verhouding $\frac{3}{2}$ bij vermenigvuldiging met 4 als product de verhouding $\frac{81}{16}$ op en de verhouding $\frac{4}{9}$ bij vermenigvuldiging met $\frac{3}{2}$ de verhouding $\frac{8}{27}$. En de verhouding $\frac{8}{27}$ geeft bij deeling door de verhouding $\frac{2}{3}$ als quotiënt 3, de verhouding $\frac{81}{16}$ bij deeling door 4 de verhouding $\frac{3}{2}$, en de verhouding $\frac{4}{9}$ bij deeling door $\frac{2}{3}$ de verhouding $\frac{8}{27}$.

Zooals men ziet, zijn de bewerkingen met verhoudingen inderdaad vermenigvuldigingen, deelingen, machtsverheffingen, worteltrekkingen en logarithmenemingen, met gebroken macht- en wortelexponenten zelfs. Trouwens, Stevin merkt reeds op, dat de meeningen omtrent den aard dier bewerkingen uiteenloopen. „Il y a controuerſe entre les Autheurs Mathematiciens (& principalement entre les Cõmentateurs de la cincquieſme definition du 5 liure d'Euclide) touchant les computations des Raiſons: Car ce que les aucuns appellent Addition & Soubſtraction des Raiſons, les autres veullent que ce soit Multiplication, & Diuiſion, les autres diſent que c'eſt matiere obſcure & confuſe. Mais comme il auint à pluſieurs autres diſciplines, eſquelles l'on cognoit & entend la nature des principes plus parfaictement, quand on vient à la Pratique d'icelles: Ainſi nous deuiennent les proprietez des computations des Raiſons plus notoires par leur vſage: Comme entre autres la Theorie de la Muſique (dont nous deſcriprons alieurs vn traicté particulier [1])). La reigle de

[1]) Bedoeld wordt de in HS gebleven Spiegeling der Singconst.

Compaigaie (que nous delarerons ci apres) Quelques demonſtrations de Ptolemee en ſa Grando Compoſition [1]), &c." (p. 14)

Naar aanleiding van Stevin's 24ᵉ bepaling, dat van drie evenredige termen de verhouding van den 1^{en} tot den 3^{en} 2-maal zoo groot is als die van den 1^{en} tot den 2^{en}, enz., heb ik mij deze uitweidingen meenen te mogen veroorloven, om te kunnen herinneren aan de beteekenis van de meetkundige reeksen voor de ontwikkeling van de wiskundige wetenschappen: zij vormen o.a. de bron, waaraan de rekenkundige bewerkingen van de 3^e orde, de machtsverheffing en haar omkeeringen, de worteltrekking en de logarithmeneming, met geheele, gebroken en negatieve, ja, zelfs met onmeetbare exponenten haar oorsprong ontleenen. Niet zonder grond mocht Stifel van de wonderbare eigenschappen der meetkundige reeksen gewagen [2]).

Op de bepalingen van verhoudingen en evenredigheden volgen in het 1^e boek der Problemata Geometrica acht werkstukken:

1) rechte lijnen te construeeren, die zich verhouden als eenige gegeven driehoeken;

2) uit een der hoekpunten van een driehoek een rechte lijn te trekken, waardoor de driehoek in twee deelen verdeeld wordt, die zich verhouden als twee gegeven rechte lijnen;

3) uit een punt in een der zijden van een driehoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.;

4) uit een der hoekpunten van een vierhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.;

5) uit een punt in een der zijden van een veelhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.;

6) evenwijdig aan een der zijden van een driehoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.;

7) evenwijdig aan een der zijden van een vierhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.;

8) evenwijdig aan een der zijden van een veelhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.

---

1) *Μαθηματική Σύνταξις*, meer bekend onder den naam Almagest = het groote boek (van Arab. al = de en Gr. *μέγιστος* = zeer groot).

2) Poſſet hic fere nouus liber integer ſcribi de mirabilibus numerorum, ſed oportet ut me hic ſubducã, & clauſis oculis abeã.

Stifel, Arithmetica Integra, Neurenberg 1544, fol. 249 verso.

De werkstukken 4—8 zijn van Stevin's eigen vinding [1]).

Van het 1ᵉ werkstuk duidt Stevin twee constructies aan.

Bij de 1ᵉ constructie, die door Euclides (Lib. I, Propos. 42—45) uitvoerig verklaard wordt, moet men beginnen met op de halve basis van elken driehoek een parallelogram te beschrijven, dat even hoog en dus even groot is, en een hoek bevat, die voor alle driehoeken dezelfde is. Ieder van de parallelogrammen verandert men met behoud van de hoeken in een parallelogram met een zijde, die voor alle parallelogrammen dezelfde is, door toepassing van de stelling, dat er twee even groote parallelogrammen ontstaan, als men door een punt in een der diagonalen van een parallelogram rechte lijnen evenwijdig aan de zijden trekt. Voor par. EBHI (Fig. 1) bv. luidt de constructie aldus: Verleng bv. de zijde EI met een stuk IF = de zijde, die de parallelogrammen gemeen zullen hebben, trek door F een rechte lijn evenwijdig aan BE en HI, die BH in C ontmoet, vereenig C met I en trek door het punt A, waarin BE en CI elkander ontmoeten, een rechte lijn evenwijdig aan BH en EI, die CF en HI in D en G ontmoet, dan voldoet par. GIFD aan de gestelde voorwaarden.

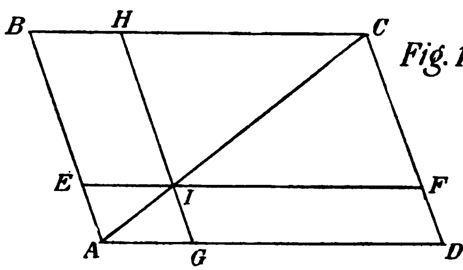


Fig. 1.

Zoodoende krijgt men in plaats van de driehoeken parallelogrammen, die een zijde en de hoeken gemeen hebben, en zich dus verhouden als de andere zijden, enz.

Stevin, die de verklaarde handelwijze meermalen toepast, kiest de parallelogrammen steeds rechthoekig.

Bij de 2ᵉ constructie neemt Stevin aan, dat de driehoeken, waarvan de verhouding door die van rechte lijnen moet worden uitgedrukt, ontstaan zijn, door een punt in den omtrek van een veelhoek met de hoekpunten te verbinden. Elke twee driehoeken, die naast elkander liggen, hebben dan een zijde gemeen en

[1]) Sequentia quinque Problemata ſunt ea quæ ante hac nunquam deſcripta putamus, p. 25,

verhouden zich als de hoogtelijnen op deze zijde. Zoo is (Fig. 2):

$$\triangle ABC : \triangle ACD = BG : HD,$$
$$\triangle ACD : \triangle ADE = CI : KE,$$
$$\triangle ADE : \triangle AEF = DL : MF.$$

Construeert men PQ als 4ᵉ evenredige tot CI, KE en $OP = HD$, en QR als 4ᵉ evenredige tot DL, MF en PQ, dan zijn dus $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$ en $\triangle AEF$ evenredig met $NO = BG$, $OP = HD$, PQ en QR.

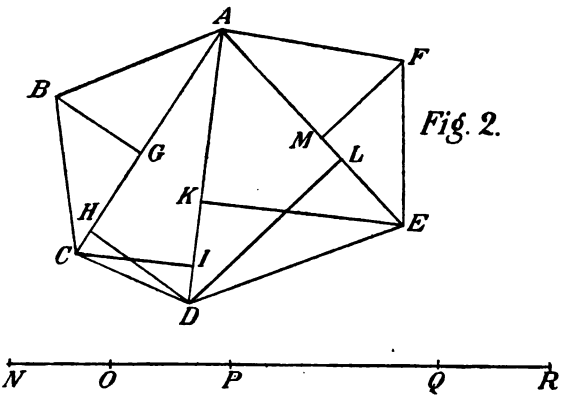


Fig. 2.

Op dit 1ᵉ werkstuk berust de oplossing van vijf van de zeven overige, t. w. van Nos. 3, 4, 5, 7 en 8.

Zooals reeds medegedeeld is, verlangen de werkstukken 2–5, die volgen, de verdeeling van een rechtlijnige figuur in twee deelen van gegeven verhouding door een rechte lijn, te trekken uit een punt in den omtrek, in Nos. 2 en 4 in het bijzonder uit een hoekpunt.

Bij de oplossing van Nos. 3—5 past Stevin een methode toe, waaraan hij, omdat ze algemeen is, reeds bij No. 3 de voorkeur geeft boven onze hedendaagsche oplossing van dit werkstuk, die o.a. in de aanteekeningen van Clavius bij het 6ᵉ boek van Euclides' Elementen (p. 343 van den 3ᵉⁿ druk van 1591) voorkomt [1]).

---

[1]) Nota.

Alius est modus constructionis huius Problematis apud varios authores, cuius inter alios meminit Chriſtophorus Clauius in fine lib. 6. Euclid. Sed vt ſequentia Problemata eſſent apertiora, ſecuti ſumus hic, noſtram generalem inventionem omnium rectilineorum. p. 25.

Om Stevin's methode te doen kennen, laten wij dien de oplossing van No. 5 volgen: Uit een punt F (Fig. 3) in de zijde AB van den vijfhoek ABCDE een rechte lijn te trekken, die den veelhoek in twee deelen verdeelt, waarvan dat aan den kant van B staat tot dat aan den kant van A als de rechte lijn G staat tot de rechte lijn H.

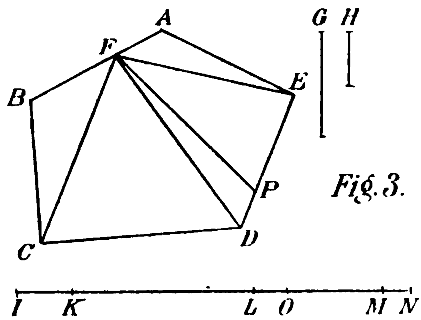


Fig. 3.

Constructie: Vereenig het punt F met de hoekpunten C, D en E van veelhoek ABCDE, en construeer vier stukken IK, KL, LM en MN, die evenredig zijn met $\triangle$ FBC, $\triangle$ FCD, $\triangle$ FDE en $\triangle$ FEA; verdeel de som IN dier stukken in twee deelen IO en ON, die tot elkander staan als G en H, en van $\triangle$ FDE, die beantwoordt aan het stuk LM, waarop het deelpunt O ligt, de zijde DE tegenover het punt F in twee deelen DP en PE, die zich verhouden als LO en OM; vereenig eindelijk F met P, dan is:

$$\text{veelhk. FPDCB} : \text{veelhk. FPEA} = G : H.$$

Bewijs:

$$\triangle FBC : IK = \triangle FCD : KL = \triangle FDE : LM = \triangle FEA : MN, \quad .\ (1)$$

$$IO : G = ON : H, \quad \ldots (2)$$

$$DP : LO = PE : OM, \quad \ldots (3)$$

$$\triangle FPD : DP = \triangle FPE : PE. \quad \ldots (4)$$

Uit (3) en (4) volgt:

$$\triangle FPD : LO = \triangle FPE : OM$$

$$= (\triangle FPD + \triangle FDE) : (LO + OM) = \triangle FDE : LM, \ldots (5)$$

uit (1) en (5):

$$\triangle FBC : IK = \triangle FCD : KL = \triangle FPD : LO$$

$$= \triangle FDE : OM = \triangle FEA : MN, \quad \ldots (6)$$

uit (6):

$$(\triangle FBC + \triangle FCD + \triangle FPD) : (IK + KL + LO)$$

$$= (\triangle FDE + \triangle FEA) : (OM + MN),$$

dus:

$$\text{veelhk. FPDCB} : IO = \text{veelhk. FPEA} : ON, \quad \ldots (7)$$

en uit (2) en (7):

veelhk. FPDCB : G = veelhk. FPEA : H,

zooals bewezen moest worden.

De werkstukken 6—8 verlangen de verdeeling van een rechtlijnige figuur in twee deelen van gegeven verhouding door een evenwijdige aan een der zijden.

In No. 6 moet △ABC door een evenwijdige aan AC in reden van DE tot EF verdeeld worden. Stevin verdeelt BC in G in reden van DE tot EF, construeert de middelevenredige BH tusschen BG en BC, en trekt HI // AC.

In No. 7 moet een vierhoek verdeeld worden; soms zal de deellijn twee zijden snijden, die op elkander volgen, soms twee zijden, die tegenover elkander staan.

Snijdt de deellijn, evenwijdig aan BC (Fig. 4), die vierhoek

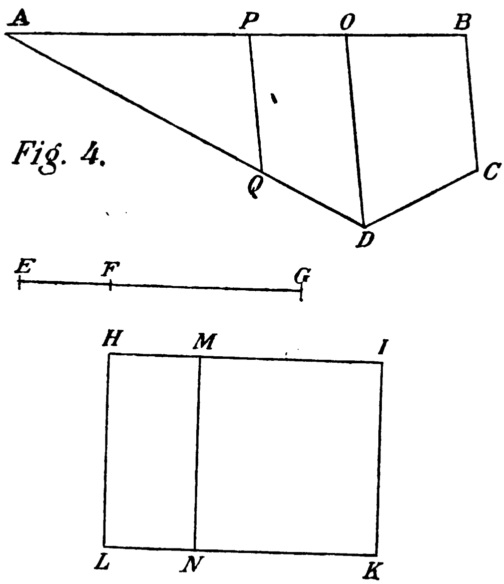


Fig. 4.

ABCD in reden van EF tot FG moet verdeelen, de zijden AB en AD, dan construeert Stevin par. HIKL = vierhk. ABCD, verdeelt HI in M in reden van EF tot FG, trekt MN // HL en DO // BC, en construeert △APQ = par. HN en ∾ △AOD (Eucl., Lib. VI, Propos. 25).

Snijdt de deellijn, evenwijdig aan AB (Fig. 5), die vierhoek

ABCD in reden van EF tot FG moet verdeelen, de zijden AD en BC, dan verlengt Stevin deze zijden, tot zij elkander in H ontmoeten, construeert par. IKLM = △HCD en par. KNOL = vierhk. ABCD, verdeelt KN in P in reden van EF en FG, trekt PQ // IM, en verdeelt eindelijk △AHB door RS // AB in reden van IP tot PN (werkst. 6).

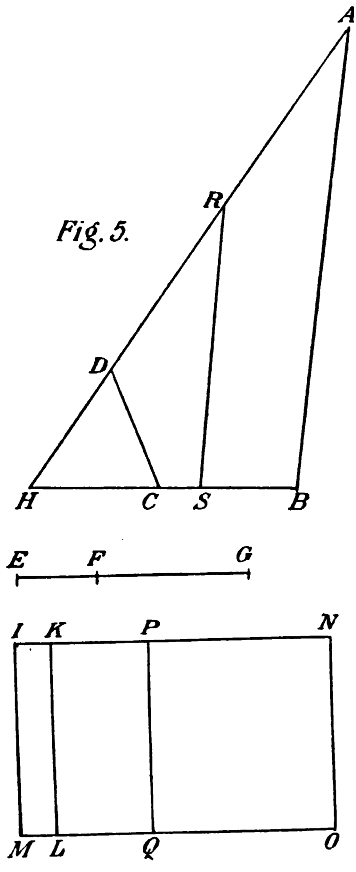


Fig. 5.

In No. 8 moet veelhk. ABCDEFG (Fig. 6) door een evenwijdige aan AB in reden van HI tot IK verdeeld worden. Stevin verlengt de zijden FE en CD, die door de deellijn gesneden zullen worden, tot zij elkander in L ontmoeten, construeert par. MNOP = △LED en par. NQRO = veelhk. ABCDEFG, verdeelt NQ in S in reden van HI en IK, trekt ST // MP en FV // AB, construeert △ LXY = par. MT en ∾ △ LFV, enz.

Snijdt de deellijn een paar andere zijden, dan moet de constructie dienovereenkomstig gewijzigd worden.

Van de acht werkstukken, door Stevin in het 1ᵉ boek van zijn Problemata Geometrica behandeld, vindt men er zeven met eenige veranderingen, die meerendeels verbeteringen mogen heeten, in zijn Meetdaet terug: Problema I als 8 Voorstel in het Tweede Deel Des Vierden Bovcx Vande Everedenheyts Reghel Der Vlacken, Problema II, III, V, VI, VII en VIII resp. als 5, 6, 7, 12, 13 en 14 Voorstel in het Tweede Deel Des Vyfde Bovcx Vande Everedelicke Snyding Der Vlacken; Problema IIII is komen te vervallen.

Bij het 1ᵉ werkstuk is de oplossing van Euclides weggelaten en die van Stevin in zooverre gewijzigd, dat de driehoeken niet meer als deelen van een veelhoek, maar afzonderlijk voorkomen. Voor de 1ᵉ van de rechte lijnen, die zich moeten

verhouden als de driehoeken, neemt Stevin thans een zijde van den 1en driehoek; de overige worden geconstrueerd als 4e evenredigen tot de hoogtelijn op de van den 1en driehoek genomen zijde, de hoogtelijn op een zijde van den betreffenden driehoek en deze zijde zelf. Van parallelogrammen wordt bij geen van de constructies meer gebruik gemaakt.

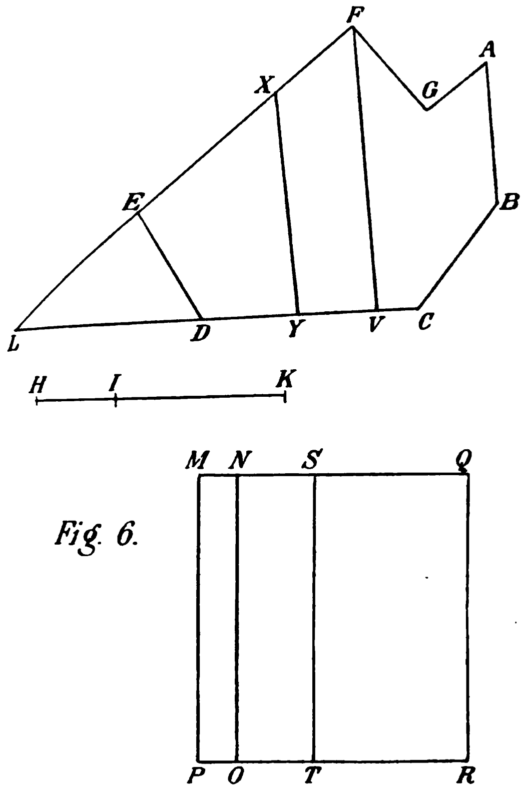


Fig. 6.

Het 13 Voorstel wijkt eenigszins van Problema VII af: het is niet meer een willekeurige vierhoek, die verdeeld moet worden door een evenwijdige aan een der zijden, maar een trapezium door een evenwijdige aan de evenwijdige zijden; de deellijn snijdt dus twee overstaande zijden, de beenen van het trapezium.

Ook de oplossing verschilt van die in de Problemata Geometrica: wel verlengt Stevin van trapezium ABCD (Fig. 7), dat door LM // AB in reden van EG tot GF verdeeld moet worden, de beenen DA en CB, tot zij elkander in H ontmoeten, maar hij bepaalt het stuk KE, dat zich tot EF moet verhouden als $\triangle$HAB tot trapezium ABCD en dat dus aan het stuk IK in Fig. 5 beantwoordt, door berekening, zonder dit evenwel uitdrukkelijk te vermelden; aldus:

$$\text{trap. ABCD} : \triangle \text{HAB} = \text{EF} : \text{KE},$$
$$\triangle \text{HDC} : \triangle \text{HAB} = \text{HD}^2 : \text{HA}^2,$$

dus:

$$(HD^2 - HA^2) : HA^2 = EF : KE,$$

dus:

$$(HD - HA^2 / HD) : HA^2 / HD = EF : KE.$$

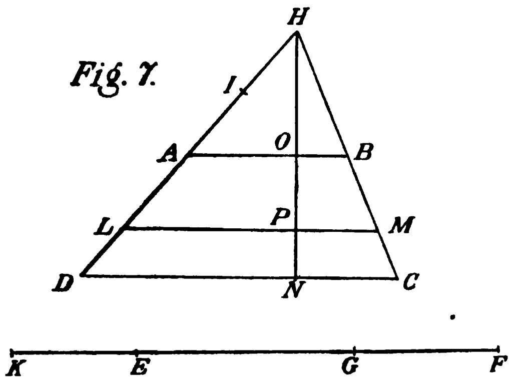
Construeert men $HI = HA^2 / HD$, dus als 3^e^ evenredige tot HD en HA, dan wordt $HD - HA^2 / HD = HD - HI = DI$, dus de evenredigheid:

$$DI : HI = EF : KE,$$

zoodat men KE kan construeeren als 4^e^ evenredige tot DI, HI en EF.

En nadat KE gevonden is, verdeelt Stevin △ HDC volgens

Fig. 7.



het 12 Voorstel door LM // AB in reden van KG tot GF.

Eindelijk is het 14 Voorstel in de Meetdaet algemeener dan Problema VIII in de Problemata Geometrica: de deellijn behoeft niet meer evenwijdig aan een der zijden van den veelhoek getrokken te worden, haar richting mag willekeurig worden aangenomen. Ook de oplossing is algemeener en fraaier. Stevin trekt door de hoekpunten van veelhoek ABCDEF (Fig. 8), die door *Za* // GH in reden van IL tot LK verdeeld moet worden, evenwijdigen aan GH, construeert QR, RS, ST, TV en VX evenredig met △ AFM, trapezium AMEP, trapezium PEDO, trapezium ODNB en △ BNC, verdeelt QX in Y in reden van IL tot LK, en eindelijk trapezium ODNB, dat beantwoordt aan het stuk TV, waarop het deelpunt Y ligt, volgens het 13 Voorstel door *Za* // GH in reden van TY tot YV.

„De ſnyding der rechtlinighe platten", zegt Stevin op pp. 138—139 van de Meetdaet, „gheſchiet deur rechte linien op driederley wijſe: D'eene met linien commende uyt een

gheftelt punt inden omtreck: d'ander daer buyten: de derde evenwijdighe met eenighe getoonde lini."

Met werkstukken over de „fnydingh der rechtlinighe platten met een lini commende uyt een gheftelt punt buyten den omtreck" erkent Stevin „doende gheweeft [te] hebben", maar, evenals zooveel anderen, vruchteloos. Vandaar, dat „voorftellen defer ghedaente" niet in de Problemata Geometrica konden worden opgenomen, hoezeer de schrijver overtuigd was, dat „de fnijding deur een punt foo wel ghegheven buyten den omtreck, als daer binnen" in een „oirdentlicke befchrijving vant fnyen der platten behooren, te meer dattet in deeling van landẽ fomwijlen dadelick vereyfcht wort".

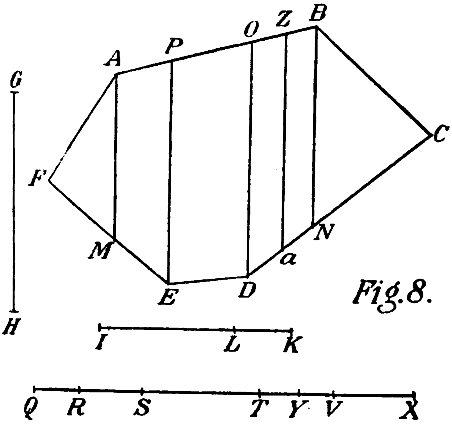


Fig. 8.

Twee jaren na de verschijning van Stevin's werk zag evenwel Benedetti's Diversarum Speculationum Mathematicarum et Physicarum Liber, Turijn 1585, het licht: uit dit werk zijn „de form der wercking en bewijfing defer voorftellen [in de Meetdaet] getrocken en veroirdent". Pas later bleek Stevin, dat Tartaglia, onder wiens leiding Benedetti de vier eerste boeken van Euclides' Elementen had doorgewerkt, reeds in zijn General Trattato dé Numeri e Misure, Venetië 1556—1560, dit onderwerp had behandeld [1]).

---

[1]) De vier voorftellen defer ghedaente feer fpitfvoudich fijnde, en merk ick niet by de Griecken bekent gheweeft te hebben, dan vermoedefe in eenighe overbleven fchriften des wijfentijts weerom te voorfchijn gherocht te wefen, uyt welcke fy ghecommen meughen fijn onder anderen ter handt van Ioannes Baptista Benedictus (uyt wiens fchriften vertoochfe wijfe gheftelt, wy de form der wercking en bewijfing defer voorftellen ghetrocken en veroirdent hebben :) Oock ter handt van Nicolas Tartaglia, die ick daer na bevonden heb dat daer af ghefchreven had in Il libro della quarte parte: Mijn reden van fulck vermoeden is dufdanigh: Ymant die fich voorftelt oirdentlick te willen vervolghen de befchrijving vant fnyen der platten, hem comt int ghedacht daer in te behooren de fnijding deur een punt foo wel ghegheven buyten den omtreck, als daer

De vier werkstukken, die Stevin in de Meetdaet oplost, luiden:

1) door een punt buiten een driehoek een rechte lijn te trekken, waardoor de driehoek in twee deelen verdeeld wordt, die zich verhouden als twee gegeven rechte lijnen (8 Voorstel);

2) door een punt binnen een driehoek (zoo mogelijk) een rechte lijn te trekken, waardoor enz. (9 Voorstel);

3) door een punt buiten (binnen) een vierhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz. (10 Voorstel);

4) door een punt buiten (binnen) een veelhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz. (11 Voorstel).

Bij de oplossing van het 8 Voorstel wordt door Stevin „een meetconſtighe wercking ghetrocken uyt een ſtelreghelſche" [1]), naar onze wijze van voorstellen aldus:

Moet △ ABC (Fig. 9) door een rechte lijn uit D verdeeld worden in reden van FG tot EG, dan beginne men met D beurtelings te verbinden met elk der hoekpunten van den driehoek, om de zijden te bepalen, die door de deellijn gesneden zullen worden. Zijn AB en AC de zijden, die door de deellijn in N en M gesneden worden, en trekt men uit D een evenwijdige aan BA, die AC in H ontmoet, dan is:

$$\triangle\ ANM : \text{vierhk. } MNBC = FG : EG, \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\triangle\ ANM : \triangle\ ABC = AM \times AN : AB \times AC, \qquad \ldots \quad (2)$$

$$DH : AN = (AH + AM) : AM. \qquad \ldots \quad (3)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$AM \times AN : AB \times AC = FG : EF. \qquad \ldots \quad (4)$$

---

binnen, te meer dattet in deeling van landẽ ſomwijlen dadelick vereyſcht wort: Maer ſulcx ſoodaniger menſchen ghedachten te weſen, blijckt noch deur dien der veel verſcheyden dit verſchil malcander voorgheſtelt hebben, als den boveſchreven Benedictus wiens ſchrift een brief van antwoort was op ſulcken vraghe. Ten anderen Cardanus met Ludovicus Ferrarus hebben ſulcx voorghehouden aan Tartaglia, t'welck hij Tartaglia daer te vooren, ſoo hij ſelf ſchrijft, in ſijn openbaer redenſtrijt voorgheſtelt had. My ſijnder oock ander bekent die daer me, eer deſe voorſtellen t'haerder handt ghecommen waren, doende gheweeſt hebben, onder welcke ick een was.

Maer t'ghene hier af de menſchen nu ter tijt ontmoet, derghelijcke iſt billich toe te laten ontmoet te hebben de Vinders der ſeltſame wetenſchappen daer af ons ſoo ſeecker teyckens ghebleven ſijn, t'welck waren, ſoo inde bepaling van dies t'ſijnder plaets verclaert is, de menſchen des wijſentijts, daerom gevet groot vermoeden, datſe ſulcken vermaert vindlick deel der Meetconſt niet onghevonden ghelaten hebben. Meetdaet, p. 144.

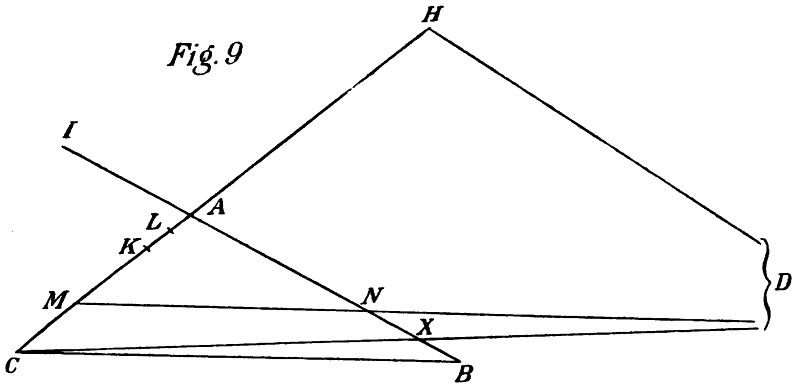
[1]) Meetdaet, p. 147.

In (3) en (4) zijn AM en AN onbekend; substitueert men AN uit (3) in (4), dan krijgt men ter bepaling van AM de vierkantsvergelijking:

$$AM^2 - \frac{FG \times AB \times AC}{EF \times DH} \times AM - \frac{FG \times AB \times AC \times AH}{EF \times DH} = 0.$$

Construeert men met Stevin $AI = FG \times AB : EF$, dus als 4e evenredige tot EF, FG en AB, $AK = AI \times AC : DH$, dus als 4e evenredige tot DH, AI en AC, en $AL = \frac{1}{2} AK$, dan neemt de vierkantsvergelijking den vorm:

Fig. 9



$$AM^2 - 2AL \times AM - 2AL \times AH = 0$$

aan, waaruit:

$$AM = AL + \sqrt{AL\,(AL + 2\,AH)}$$

gevonden wordt.

Men kan het punt M en daarmede de deellijn DM dus bepalen, door $LM = \sqrt{AL\,(AL + 2AH)}$, d. i. de middelevenredige tusschen AL en AL + 2AH, te nemen.

Ligt D binnen △ ABC (9 Voorstel), dan vindt men:

$$AM = AL \pm \sqrt{AL\,(AL - 2AH)}.$$

Wegens het teeken ± zijn er thans in het algemeen „tottet begheerde twee befluyten" [1]), maar de verdeeling kan ook onmogelijk wezen: zoo kan men „deur een driehoucx fwaerheyts middelpunt gheen lini trecken daer af een cleender deel fnyende dan in fulcken reden totten heelen driehouck, als van 4 tot 9, ende gheen grooter dan als van 5 tot 9" [2]).

---

1) Meetdaet, p. 151.

2) Meetdaet, p. 150.

Het 10 Voorstel verlangt vierhoek ABCD uit E te verdeelen in reden van FG tot GH.

Snijdt de deellijn twee zijden, die tegenover elkander staan (Fig. 10), dan construeert Stevin HK zóó, dat vierhk. ABCD : △ BCI = FH : HK, en verdeelt △ ADI volgens het 8 Voorstel uit E in reden van FG tot GK.

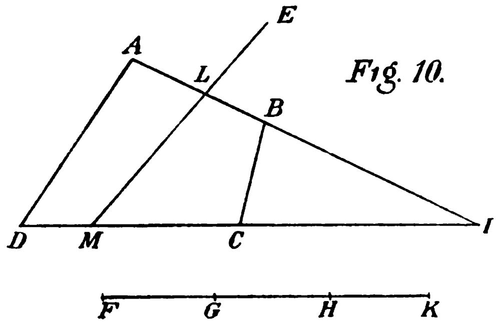


Fig. 10.

Snijdt de deellijn twee zijden, die op elkander volgen (Fig. 11), dan construeert Stevin FI zóó, dat vierhk. ABCD : △ ABD = FH : FI, en verdeelt △ ABD eveneens volgens het 8 Voorstel uit E in reden van FG tot GI.

Is in het bijzonder vierhoek ABCD een parallelogram en worden de zijden AB en CD gesneden, dan verbindt Stevin de middens I en K van AD en BC, verdeelt IK in L in reden van FG tot GH en trekt EL.

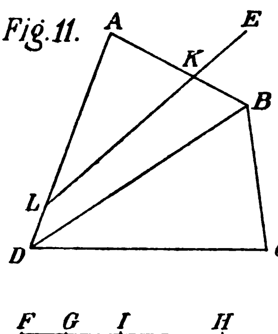


Fig. 11.

Het 11 Voorstel eindelijk verlangt veelhoek ABCDEFGH (Fig. 12) uit I te verdeelen in reden van KL tot LM.

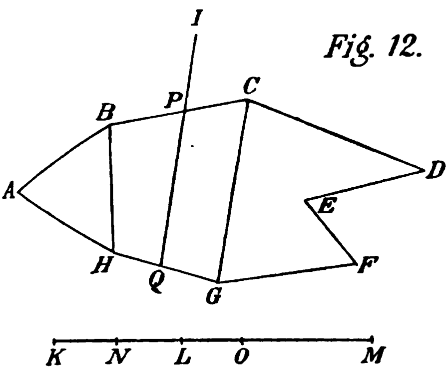
Zijn BC en GH de zijden, die door de deellijn gesneden zullen worden, dan trekt Stevin BH en CG, verdeelt KM in stukken KN, NO en OM, die tot elkander staan als △ ABH, vierhoek BCGH en vijfhoek CDEFG, en eindelijk vierhoek BCGH volgens het 10 Voorstel uit I in reden van NL tot LO.

Hoewel Stevin zijn Problemata IIII—VIII nergens behandeld had gevonden [1]), toch ontbrak het hem niet aan voorgangers op dit terrein. Tartaglia is reeds genoemd. Maar zelfs Euclides (± 300 v. Chr.) had zich reeds in zijn Boek over de Verdeeling van Figuren, waarvan Proclus (5ᵉ eeuw

[1]) Zie de noot op p. 134.

n. Chr.) in zijn commentaar op het 1e boek der Elementen melding maakt, met opgaven van denzelfden aard bezigge-houden. Euclides' verzameling werkstukken bleef evenwel tot in de 2e helft van de 16e eeuw onbekend, toen, omstreeks 1563, door John Dee een Arabisch geschrift over dit zelfde onderwerp werd ontdekt, dat weliswaar Mohammed Bagdadinus als schrijver vermeldt, maar niettemin door Dee op aannemelijke gronden aan Euclides werd toegeschreven, een vermoeden, dat sedert door Wöpcke's ontdekkingen (1851) tot zekerheid werd verheven: Dee's en Wöpcke's vondsten moeten als Arabische bewerkingen van fragmenten van Euclides' *Περὶ Διαιρέσεων Βιβλίον* worden aangemerkt. In Dee's fragment vindt men o. a. behandeld de verdeeling van drie- en vierhoeken in stukken van gegeven verhouding door een rechte lijn evenwijdig aan een gegeven rechte lijn, alsmede (hoewel minder algemeen) die van een vijfhoek door een rechte lijn *a*) uit een punt in een der zijden, *b*) evenwijdig aan een der zijden; in dat van Wöpcke buitendien o. a. de constructie van een rechte lijn, die *a*) een figuur, ingesloten door een cirkelboog en twee rechte lijnen, in even groote stukken verdeelt, *b*) van een gegeven cirkel een stuk van bepaalde grootte afsnijdt.

Fig. 12.



Dee bezorgde een Latijnsche vertaling van zijn Arabisch handschrift, die door Federigo Commandino, bekend door zijn Latijnsche uitgaven van werken van Grieksche wiskunstenaars, van een aanhangsel werd voorzien, dat den inhoud van dit HS beknopt weergeeft en de verdeeling van figuren algemeener behandelt dan door Mohammed geschiedt. Hun gemeenschappelijke arbeid verscheen in 1570 te Pisa onder den titel:

De ſuperficierum diuiſionibus liber Machometo Bagdedino adſcriptus, nunc primum Ioannis Dee Londinenſis et Federici Command. Urb. Opera in lucem editus. Federici Command.

10

de eadem re libellus Pifauri ap. Hieronymum Concordiam 1570 [1]).

Ook Leonardo van Pisa (Fibonaci) 's Practica Geometriæ, 1220, en Paciuolo (Lucas de Burgo) 's Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita, Venetië 1494, handelen over de verdeeling van figuren, waarbij door genen blijkbaar uit een Arabische bewerking van Euclides' gelijknamigen arbeid is geput, terwijl door dezen Fibonaci's werk als zijn voornaamste bron wordt aangewezen [2]).

Wij moeten aannemen, dat Stevin tijdens de samenstelling van zijn Problemata Geometrica met geen dezer werken bekend is geweest, al vindt men nauwelijks twee jaren later Paciuolo's Summa door hem in zijn Arithmetique bij de oplossing van vergelijkingen vermeld [3]).

Maar al was het tegendeel waar, Stevin's arbeid overtreft dien van zijn voorgangers. En het is niemand minder dan de geleerde, met de geschriften van Leonardus Pisanus, Frater Lucas Pacciolus, Nicolaus Tartalea, Machometus Bagdedinus en Federicus Commandinus volkomen vertrouwde Jezuïet Clavius, die onzen voortreffelijken stamgenoot dit loffelijk getuigenis uitreikt, door in zijn Geometria Practica, Rome 1604, „Mufter eines Lehrbegriffs der praktifchen Geometrie" [4]), de verdeeling der veelhoeken (Lib. VI) naar diens Problemata Geometrica te bewerken [5]).

---

1) Cantor, t. a. p., 1ster Band, Leipzig 1880, pp. 247—248; II pp. 511—512.

Kästner, Geschichte der Mathematik, 1ster Band, Göttingen 1796, pp. 272—273; 2ter Band, Göttingen 1797, pp. 46—47.

2) Cantor, t. a. p., II p. 34 en p. 302.

3) Les deriuatifs de ② egale a ①⓪ [d. z. vergelijkingen, die tot vierkantsvergelijkingen teruggebracht kunnen worden], inuentez par le fufdict premier autheur incognu, font defcripts par Lucas Pacciolo. Arithmetique, p. 268.

4) Kästner, t. a. p., 3ter Band, Göttingen 1799, p. 287.

5) Edidit quidem Federicus Commandinus anno 1570. libellum de fuperficierum diuifionibus Machometo cuidam Bagdedino Arabi adfcriptum: ipfeque eadem de re alium breuiorem, & magis vniuerfalem confcripfit: eftque fane libellus vterque acutiffimus, & eruditione refertiffimus. Idem vero poftea argumentum alia via agreffus eft, & meo certe iudicio, faciliori, & magis generali, Simon Steuinius Brugenfis: sed in qua aliquid defiderari videatur, vt omnibus fuperficiebus rectilineis (quod ipfe velle videtur) conuenire poffit,

Het 2e boek van de Problemata Geometrica handelt over de „regula falſi continuæ quantitatis", die falsi heet, „non quod falſum docet, ſed quia per falſum poſitionem pervenitur ad cognitionem veri", zooals Stevin (p. 38) Apianus nazegt [1]).

De regula falsi (regula positionum, regula falsarum positionum) vormt in de rekenkunde een hulpmiddel voor hen, „so in der Coss nicht gegründet sind" [2]), om, zonder kennis van algebra, vraagstukken op te lossen, die aanleiding geven tot vergelijkingen van den 1en graad. „Man erhebe die Falsi [echter] so hoch man wolle", zoo oordeelt Stifel (1545), „man bessere sie auch oder mehre sie soweit vñ tieff man ymmer könne, so bleibt sie doch gegen die Coss wie ein Punkt gegen einen Zirkel" [3]).

Een vergelijking van den vorm $ax = b$ werd opgelost volgens de regula falsi simplicis positionis: men nam voor x willekeurig x'; vond men $ax' = b'$, dan is $b' : b = x' : x$. En een vergelijking van den vorm $ax + b = c$ werd opgelost volgens de regula falsi duplicis positionis: men nam voor x willekeurig x' en x''; vond men $ax' + b = c'$ en $ax'' + b = c''$, dan is $a(x' - x) = c' - c$ en $a(x'' - x) = c'' - c$, dus $(c' - c) : (c'' - c) = (x' - x) : (x'' - x)$ en $x = \{x''(c' - c) - x'(c'' - c)\} : (c' - c'')$, een uitkomst, die men naar onderstaand schema berekende:

$$
\begin{array}{lll}
x' & c' - c & = x''\,(c' - c) \\
 & & \\
x'' & c'' - c & = x'\,(c'' - c) \\
\hline
 & c' - c'' \quad \text{afgetr.} & x''(c' - c) - x'(c'' - c) \quad \text{afgetr.}
\end{array}
$$

$$\text{uitkomst: } \frac{x''(c' - c) - x'(c'' - c)}{c' - c''}.$$

---

quod facile iudicabunt, qui illius problemata Geometrica attente perlegerint .... Deinde ſuperficierum rectilinearum diuiſionem aggrediemur, inſiſtentes eiuſdem Steuinii veſtigiis, niſi quando generalius rem oportebit demonſtrare. Nihil autem de ratione Machometi, & Federici Commandini dicemus: ....

Clavius, Opera Mathematica, Tomus Secundus, Mainz 1611, p. 147.

1) Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, Leipzig 1888, p. 101.

2) Unger, t. a. p., p. 101.

3) Unger, t. a. p., pp. 103—104.

Een paar voorbeelden van de regula falsi ontleen ik aan Stevin's Arithmetique, p. 101, en Pratique d'Arithmetique, pp. 122 –123.

Reigle de faux.

1) D'vne faulſe poſition.

„Explication du donné & requis. On veult ſçauoir quel nombre auec ſa moitie fera 18. Construction. On poſera quelque nombre ainſi qu'il auiendra, comme ſ'il fuſt le vrai nombre requis, ſoit 2: le meſme auec ſa moitie qui eſt 1, faict 3: Or ce n'eſt pas 3 ce que nous voulons, mais 18; Donc la poſition de 2 eſtoit faulſe, parquoi a fin d'auoir le vrai requis, on dira 3 viennent de 2, d'ou viendront 18? faict pour ſolution 12."

2) De deux fauſſes poſitions.

„Exemple II. Trois aulnes de drap couſtent 11 ℔[1]), deſquelles la ſeconde couſte le double de la premiere plus 2 ℔, & la troiſieſme aulne couſte le triple de la premiere moins 3 ℔; Combien couſte chaſcune aulne?

Constrvction. On poſera pour la premiere aulne quelque quantité de liures à plaiſir, ſoit 1 ℔, doncques la ſeconde aulne ſelon la propoſition, couſte 4 ℔, & la troiſieſme 0 ℔; Or ces trois ſommes montent 5 ℔, & doibuent monter 11 ℔; Doncques la premiere poſition de 1 vient trop peu ou moins que nous ne deſirons 6, ce qu'on notera en ceſte ſorte:

1 moins 6.

Puis on fera quelque autre poſition, ſoit de 4 ℔, pour la premiere aulne, doncques ſelon la propoſition la ſeconde couſte 10 ℔, & la troiſieſme 9 ℔, leſquelles trois ſommes montent 23 ℔, & ne doibuent monter que 11 ℔, doncques la ſeconde poſition eſt trop, ou plus que nous ne deſirons de 12 ℔, leſquelles on notera ſoubs la premiere poſition, & leur diſpoſition ſera alors telle:

1 moins 6
4 plus 12

Puis on multipliera par croix [t. w. 4×6 en 1×12], & la reſte ſ'acheuera ſelon la doctrine du 17[e] probleme de l'Arith-

---

[1]) 1 liure (℔) = 20 ſolz (ß) à 12 deniers (₰), zoowel in Vlaanderen, als in Venetië, Frankrijk, Engeland, enz., ofschoon van verschillende waarde.

metique [waar men op p. 104 in verband met de teekens van $c' - c$ en $c'' - c$ den regel vindt medegedeeld, dat „Semblables requierent foubftraction, Et diffemblables addition."] & viendra 2 ℔ pour la premiere aulne, dont la difpofition de l'operation acheuée fera telle:

$$\begin{array}{rr} 1 \text{ moins } 6. & 24 \\ 4 \text{ plus } \underline{12.} & \underline{12} \\ 18. & 36 \text{ quotient } 2. \end{array}$$

Or eftant cognue la valeur de la premiere aulne, il eft manifefte que la feconde (felon la propofition) coufte 6 ℔, & la troifiefme 3 ℔."

Hebben Gemma Frisius (1540), Stifel (1544) e. a. de regula falsi duplicis positionis bij de oplossing van vergelijkingen van hoogeren dan den 1[en] graad toegepast en Cardano (1545), Bürgi (1592/93), Pitiscus [1]) (1612) e. a. zich van dezen regel bediend bij de benadering van de wortels van hoogere-machts-vergelijkingen, Stevin bracht de regula falsi simplicis positionis van het terrein der rekenkunde op dat der meetkunde over, na tot het inzicht te zijn gekomen, dat de betrekking van evenredige afhankelijkheid, waarin bij dezen regel de onbekende en de bekende grootheden tot elkander staan, aan de evenredigheid van gelijkstandige lijnen in gelijkvormige figuren beantwoordt.

Door middel van zijn regula falsi continuæ quantitatis, ons beter bekend onder den naam van constructie-methode der gelijkvormige figuren, lost Stevin vier werkstukken op:

1) een gelijkzijdigen driehoek te construeeren, als het verschil tusschen de hoogtelijn en de som van de zijde en den straal van den ingeschreven cirkel gegeven is;

2) een vierkant te construeeren, als het verschil tusschen de zijde en de diagonaal gegeven is;

3) een regelmatigen vijfhoek te construeeren, als de verbindingslijn van een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde gegeven is;

4) een vijfhoek LMNKI gelijkvormig met een gegeven vijfhoek BCDEF te construeeren, als NL — MN + IL gegeven is.

---

[1]) Nieuw Archief voor Wiskunde, 2[e] Reeks, 3[e] Deel, Amsterdam 1898, p. 265.

Bij het 1e werkstuk bv. construeert Stevin een willekeurigen gelijkzijdigen driehoek BCD, vermindert de zijde CD met een stuk CH = de hoogtelijn BE op CD, vermeerdert HD met een stuk DI = de straal FG uit het middelpunt F van △BCD op de zijde BC neergelaten, en beschrijft eindelijk de zijde KL van den verlangden △LKM als 4e evenredige tot HI, BC en het gegeven verschil A.

Evenzoo worden de drie overige werkstukken opgelost.

Het 3e boek van de Problemata Geometrica — o. i. het belangrijkste van de vijf — handelt hoofdzakelijk over halfregelmatige veelvlakken.

Zooals bekend is, onderscheidt men:

1) halfregelmatige veelvlakken met regelmatige, incongruente zijvlakken en onregelmatige, congruente veelvlakshoeken;

2) halfregelmatige veelvlakken met onregelmatige, congruente zijvlakken en regelmatige, incongruente veelvlakshoeken; die der eene soort kunnen als poolfiguren van die der andere soort worden aangemerkt.

Om de convexe halfregelmatige veelvlakken van de 1e soort te bepalen, bedenke men:

1) dat in ieder hoekpunt van het veelvlak niet meer dan vijf zijvlakken van niet meer dan drieërlei soort kunnen samenkomen, daar anders de som van de zijden der veelvlakshoeken niet beneden 360° zou blijven;

2) dat, als er in ieder hoekpunt van het veelvlak α a-hoeken, β b-hoeken, . . . samenkomen en bv. a oneven is, een van de aantallen $\alpha - 1$, β, . . . minstens $= 2$ moet wezen, daar wegens de congruentie der veelvlakshoeken de zijvlakken, die een zijvlak met een oneven aantal zijden begrenzen, alle evenveel zijden moeten tellen;

3) dat, als het veelvlak Z zijvlakken, H hoekpunten en R ribben telt en er in ieder hoekpunt α a-hoeken, β b-hoeken, . . . samenkomen:

$$Z + H = R + 2,$$

$$2R = (\alpha + \beta + \ldots)\, H,$$

$$Z = \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \ldots\right) H,$$

dus:

$$\left(\frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} + \ldots + 2 - \alpha - \beta - \ldots\right) H = 4$$

is [1]).

Aan de voorwaarden, onder 1), 2) en 3) vermeld, voldoen vijftien veelvlakken met Z regelmatige zijvlakken, waaronder Z_a a-hoekige, Z_b b-hoekige, ..., $H(a, b, \ldots)$ congruente ν-zijdige veelvlakshoeken, waarvan de zijden tot een a-hoek, een b-hoek, ... behooren, en R ribben:

Convexe halfregelmatige veelvlakken van de 1e soort:

a) met driezijdige veelvlakshoeken:

1) $Z = 8 : Z_3 = 4,\ Z_6 = 4;$	$H(3, 6, 6) = 12;\ R = 18.$
2) $Z = 14 : Z_3 = 8,\ Z_8 = 6;$	$H(3, 8, 8) = 24;\ R = 36.$
3) $Z = 32 : Z_3 = 20,\ Z_{10} = 12;$	$H(3, 10, 10) = 60;\ R = 90.$
4) $Z = 14 : Z_4 = 6,\ Z_6 = 8;$	$H(4, 6, 6) = 24;\ R = 36.$
5) $Z = 32 : Z_5 = 12,\ Z_6 = 20;$	$H(5, 6, 6) = 60;\ R = 90.$
6) $Z = n + 2 : Z_n = 2,\ Z_4 = n;$	$H(n, 4, 4) = 2n;\ R = 3n.$
7) $Z = 26 : Z_4 = 12,\ Z_6 = 8,\ Z_8 = 6;$	$H(4, 6, 8) = 48;\ R = 72.$
8) $Z = 62 : Z_4 = 30,\ Z_6 = 20,\ Z_{10} = 12;$	$H(4, 6, 10) = 120;\ R = 180.$

b) met vierzijdige veelvlakshoeken:

9) $Z = 26 : Z_3 = 8,\ Z_4 = 18;$	$H(3, 4, 4, 4) = 24;\ R = 48.$
10) $Z = 2n + 2 : Z_n = 2,\ Z_3 = 2n;$	$H(n, 3, 3, 3) = 2n;\ R = 4n.$
11) $Z = 14 : Z_3 = 8,\ Z_4 = 6;$	$H(3, 4, 3, 4) = 12;\ R = 24.$
12) $Z = 32 : Z_3 = 20,\ Z_5 = 12;$	$H(3, 5, 3, 5) = 30;\ R = 60.$
13) $Z = 62 : Z_3 = 20,\ Z_4 = 30,\ Z_5 = 12;$	$H(3, 4, 5, 4) = 60;\ R = 120.$

c) met vijfzijdige veelvlakshoeken:

14) $Z = 38 : Z_3 = 32,\ Z_4 = 6;$	$H(3, 3, 3, 3, 4) = 24;\ R = 60.$
15) $Z = 92 : Z_3 = 80,\ Z_5 = 12;$	$H(3, 3, 3, 3, 5) = 60;\ R = 150.$

Aan deze veelvlakken beantwoorden vijftien veelvlakken met H regelmatige veelvlakshoeken, waaronder H_α α-zijdige, H_β β-zijdige, ..., $Z(\alpha, \beta, \ldots)$ congruente n-hoekige zijvlakken, waarvan de hoeken tot een α-vlakshoek, een β-vlakshoek, ... behooren, en R ribben:

---

[1]) Baltzer, Die Elemente der Mathematik, 5tes Buch, § 7, 6, 2ter Band, 3te Auflage, Leipzig 1870, pp. 217—220.

Convexe halfregelmatige veelvlakken van de 2e soort:

a) met driehoekige zijvlakken:

1*) $H = 8 : H_3 = 4, \ H_6 = 4;$ $Z(3, 6, 6) = 12;$ $R = 18.$

. . . .

b) met vierhoekige zijvlakken:

9*) $H = 26 : H_3 = 8, \ H_4 = 18;$ $Z(3, 4, 4, 4) = 24;$ $R = 48.$

. . . .

c) met vijfhoekige zijvlakken:

14*) $H = 38 : H_3 = 32, \ H_4 = 6;$ $Z(3, 3, 3, 3, 4) = 24;$ $R = 60.$

. . . .

De ontdekking van de halfregelmatige veelvlakken van de 1e soort wordt op gezag van Pappus [1]) aan Archimedes toegeschreven; die van de 2e soort vindt men, naar Baltzer [2]) medegedeelt, voor de 1e maal in J. H. T. Müller's Trigonometrie, 1852, p. 345, beschreven.

De beschrijving dier veelvlakken bij Pappus [1]) bepaalt zich tot een opgaaf van het aantal en de soort der zijvlakken en de berekening van het aantal der lichaamshoeken en der ribben bij dertien dier veelvlakken: van onze lijst het 8-vlak No. 1, de 14-vlakken Nos. 2, 4 en 11, de 26-vlakken Nos. 9 en 7, de 32-vlakken Nos. 3, 5 en 12, het 38-vlak No. 14, de 62-vlakken Nos. 13 en 8, en het 92-vlak No. 15.

De veelvlakken Nos. 7 en 10, die begrensd worden door twee *n*-hoeken, waarvan de vlakken evenwijdig loopen, alsmede door *n* vierkanten bij No. 7 en 2*n* gelijkzijdige driehoeken bij No. 10, en die dus wegens de onbepaaldheid dier *n*-hoeken twee groepen van veelvlakken vormen, Archimedische prisma's en antiprisma's geheeten, ontbreken bij Pappus.

Evenzoo bij Kepler, die de „tredecim Archimedêa Corpora" in zijn Harmonices Mundi Libri V, Linz 1619, Lib. II, XXVIII Propos., pp. 61—65, onder toepassing van de voorwaarden 1) en 2) uit de zijvlakken samenstelt, afbeeldt en benoemt: van onze lijst No. 14, cubus simus, No. 11, cuboctaëdron, en No. 9, rhombicuboctaëdron, uit drie- en vierhoeken; No. 15, dodecaëdron simum, en No. 12, icosidodecahe-

---

[1]) Pappi Alexandrini Mathematicæ Collectiones, ed. Commandino, Bonn 1660, Lib. V, Propos. XVIII (inleiding), pp. 129—130.

[2]) Baltzer, t. a. p., p. 207 Noot.

dron uit drie- en vijfhoeken; No. 1, tetraëdron truncum, uit drie- en zeshoeken; No. 2, cubus truncus, uit drie en achthoeken; No. 3, dodecaëdron truncum, uit drie- en tienhoeken; No. 4, octaëdron truncum, uit vier- en zeshoeken; No. 5, icosihedron truncum, uit vijf- en zeshoeken; No. 13, rhombicosidodecaëdron, uit drie-, vier- en vijfhoeken; No. 7, cuboctaëdron truncum, uit vier-, zes- en achthoeken; No. 8, icosidodecaëdron truncum, uit vier-, zes- en tienhoeken.

Buitendien vindt men bij Kepler, t. a. p., Lib. II, XXVII Propos., p. 61, twee halfregelmatige veelvlakken van de 2e soort beschreven, Nos. 11* en 12* van onze lijst, resp. met twaalf en met dertig gelijkzijdige parallelogrammen (rhombi) tot zijvlakken [1]).

De beroemde Duitsche schilder Albrecht Dürer, als schrijver van weinig minder beteekenis dan als kunstenaar, leert in het 4e boek van zijn Underweysung der meſſung mit dem zirckel vnd richtſcheyt, Neurenberg 1525, de netwerken construeeren van de vijf regelmatige veelvlakken en van de zeven halfregelmatige veelvlakken Nos. 1, 2, 11, 4, 9, 14 en 7 van onze lijst, alsmede die van twee veelvlakken, waarvan het eene door tweeëndertig driehoeken en zes twaalfhoeken en het andere door twaalf driehoeken en zes vierhoeken begrensd wordt [2]).

Evenals de samenstelling van netwerken een vinding van Dürer zelf schijnt te wezen [3]), evenzoo zijn de zeven half-

---

[1]) Wat de keuze der benamingen bij Kepler aangaat, zij opgemerkt:

1°. dat een cuboctaëdron wordt ingesloten door zes vierhoeken (evenals een kubus) en acht driehoeken (evenals een octaëder), een rhombicuboctaëdron door twaalf vierhoeken (evenals een van de rhomboëders van propos. XXVII), nog zes vierhoeken (evenals een kubus) en acht driehoeken (evenals een octaëder), een icosidodecahedron door twintig driehoeken (evenals een icosaëder) en twaalf vijfhoeken (evenals een dodecaëder), enz.;

2°. dat een cubus simus hem een „afgeplatte" kubus is en wordt ingesloten door zes vierhoeken (evenals een kubus) en overigens door driehoeken, enz. [„Et in hoc ordine simorum", zegt Kepler, t. a. p., p. 62, „Icoſaëdron poſſet eſſe tertium, quod eſt quaſi Tetraëdron ſimum."];

3°. dat een tetraëdron truncum hem een „afgeknot" tetraëder is en onder zijn zijvlakken veelhoeken met meer dan vijf zijden telt, enz.

[2]) Van dit werk verscheen in 1532 een Latijnsche editie te Parijs.

[3]) Cantor, t. a. p., II p. 428.

regelmatige veelvlakken, waarover hij handelt, waarschijnlijk zelfstandig door hem ontdekt; want had hij uit Pappus' *Μαθηματιχαί Συναγωγαί* geput — waarvan trouwens Commandino's Latijnsche bewerking, Pisa 1588, de oudste editie vormt, die in druk verscheen — dan zou hij zich zeker niet tot de netwerken van zeven dier veelvlakken hebben bepaald, maar ook die van de zes overige hebben afgebeeld.

Hoe dit zij, zeker is het, dat Stevin zijn kennis van de halfregelmatige veelvlakken aan Dürer ontleent. „Behalve de vijf regelmatige lichamen, waarvan de wiskunstenaars melding maken", zegt hij in de inleiding van zijn 3e boek, „zijn er eenige andere, die, hoewel minder regelmatig, evenzeer uitlokken tot wiskundige bespiegelingen en merkwaardige netwerken opleveren. Zes van deze lichamen vindt men in Dürer's Meetkunde vermeld.... " [1])

Het was Stevin evenwel niet genoeg de netwerken dier veelvlakken te kunnen ontwerpen en uit deze de veelvlakken zelf te kunnen samenstellen, hij verlangde hun oorsprong te kennen, dien het hem gelukte eindelijk te ontdekken: Dürer's lichamen bleken hem afgeknotte regelmatige veelvlakken te wezen, een afgeknot viervlak, drie afgeknotte kuben en een afgeknot achtvlak; van het 6e, den afgeplatten kubus (cubus simus) van Kepler, kon Stevin den oorsprong niet met zekerheid vaststellen; hij gist, dat dit veelvlak uit een afgeknotten kubus moet worden afgeleid [2]).

Nadat de bron was opgespoord, waaruit de halfregelmatige veelvlakken ontspringen, moet het Stevin niet moeïlijk zijn gevallen, hun aantal met drie te vermeerderen, die aan de re-

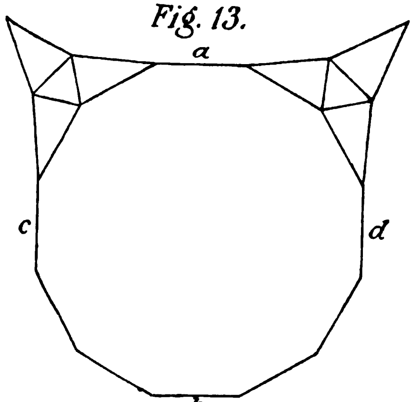
[1]) Præter quinque corpora regularia quorum Mathematici meminerunt, animaduertimus alia quædam corpora quæ quamvis talem non haberent regularitatem vt in quinque illis regularibus requiritur (nam demonſtratur quinque tantum talia corpora poſſe inveniri) nihilominus Geometricarum ſpeculationum eſſent plena, ac mirabilis diſpoſitionis correlatiuarum ſuperficierum. Horum autem corporum sex meminit Albertus Durerus, in ſua Geometria.... p. 46.

[2]) ..., vidimus tandem regularia corpora ipſorum eſſe ſcatebram, nam illorum vnum, erat tetraedrum truncatum, altera tria, truncati cubi, & quintum, truncatum octoedrum: Sexti verò corporis truncatio hæc ſcribentibus nobis erat ignota, quamvis ex truncato cubo originem habere non dubitamus. p. 46.

gelmatige twaalf- en twintigvlakken hun oorsprong ontleenen [1]), en waarvan hij zich de eer der ontdekking toeëigent, zoolang hem van geen voorganger blijkt [2]).

Stevin spreekt van zes halfregelmatige veelvlakken, die in Dürer's Geometria zouden voorkomen; dit is een vergissing, die zich tot de inleiding bepaalt. Inderdaad vindt men bij Stevin de zeven halfregelmatige veelvlakken der Messung mit Zirckel und Richtscheyt terug, vermeerderd met de drie, door hem zelf ontdekt. Van dit tiental verwijst Stevin den cubus simus, waarvan hij de herkomst niet kan vaststellen, naar een Aanhangsel, zoodat er voor hem „novem truncata corpora regularia" te behandelen overblijven.

Fig. 13.



Omtrent de twee veelvlakken van Dürer, die resp. door tweeëndertig driehoeken en zes twaalfhoeken worden ingesloten, merkt Stevin op, dat van het 1e het netwerk niet kan worden samengevouwen, omdat soms drie (lees: vier) vlakke hoeken samenkomen, waarvan de som = 360° is, en dat het 2e niet aan zijn bepaling van „truncatum corpus regulare" voldoet [3]).

---

[1]) Cum'que hæc nobis eſſent nota invenimus (nam tale quid ſæpe fit cum rerum causas cognoſcimus) alia tria corpora non minoris elegantiæ nempe ex truncatis Dodecaedro & Icoſaedro. p. 46.

[2]) Si forte ab alio ante nos ſunt inventa... fatemur hoc nos ignorare. Quare vt pro noſtro invento talia edimus. p. 47.

[3]) (ſunt quidem in eadem Alberti deſcriptione & alia duo corpora quæ ex complicatis planis componuntur quorum alterum non poteſt plicari, ratio eſt quia ad vnum angulum ſolidum conſtruendum compoſiti ſunt tres anguli plani æquales quatuor rectis, qui angulum ſolidum per 21. prop. lib. 11. Euclid. non conſtituunt. Alterum verò corpus non continetur intra metas quæ in ſequenti 11. definit. ſunt poſitæ, quare illa duo corpora reliquimus). p. 46.

Inderdaad bestaat het netwerk van het 1e veelvlak uit vier deelen als Fig. 13, zóó verbonden, dat de zijden a van het 2e 3e en 4e deel resp. samenvallen met de zijden b van het 1e, 2e en 3e deel, en uit twee twaalfhoeken, op ieder van de zijden c en c van het 2e deel één. Dit veelvlak zou dus vierentwintig driezijdige en vierentwintig vierzijdige veelvlakshoeken tellen: van de vierzijdige, door een twaalfhoek en drie driehoeken gevormd, zou de som der zijden = 360° wezen. Maar ook al kon dit netwerk worden samengevouwen, dan nog zou er geen halfregelmatig veelvlak ontstaan, daar er onder de tweeëndertig driehoeken vierentwintig gevonden worden, die niet gelijkzijdig zijn [1]).

En het netwerk van het 2e veelvlak bestaat uit zes vierkanten, die een rechthoek vormen, zesmaal zoo lang als breed, met op de zijden in de lengte twaalf gelijkbeenige driehoeken, waarvan de hoogten even groot zijn als de bases [2]): bij samenvouwing ontstaat een regelmatig zeszijdig prisma met een regelmatige zeszijdige pyramide op ieder eindvlak.

Buiten Stevin schijnt niemand opgemerkt te hebben, dat Dürer's 8e veelvlak onbestaanbaar is en dat de driehoekige zijvlakken van zijn 9e veelvlak niet gelijkzijdig zijn [3]).

---

1) · qui non habent omnia latera æqualia.

Dürer, Geometria, Parijs 1532, p. 157.

2) quorum quilibet tantam habeat altitudinem, quantum fuerit latus quadrati.

Dürer, t. a. p., p. 157.

3) Te verbeteren aanhalingen:

Sechs Quadrate zwifchen zwo Parallelen an einander gezeichnet, und auf jede ihrer Seiten, welche in die Parallelen fallen, ein gleichfeitiges Dreyeck gelegt, giebt auch ein Netz zu einem Körper, ein Prifma, das auf jeder feiner fechsfeitigen Grundflächen eine Pyramide hat.

Kästner, t. a. p., I p. 691.

Ueberall sind die Grenzflächen regelmässig gedacht, nur beim 8) Körper sind 24 unter den 32 Dreiecken nicht gleichseitig sondern nur gleichschenklig, oder wie Dürer es ausspricht „sie haben aber nit all gleych seyten".

Cantor, t. a. p., II p. 428.

Dürer zeichnet nun die zusammenhangenden Netze der Körper, und zwar der fünf regulären und von acht Archimedeischen. Auf diese Netze weist Michael Stifel im zweiten Buche seiner Arithmetica integra, 1544 hin und bringt im Druckfehlerverzeichniss am Ende des ganzen Bandes diese Netze selbst. [Stifel bepaalt zich tot de netwerken van de regelmatige veelvlakken en zwijgt over die van halfregelmatige.]

Brückner, Vielecke und Vielflache, Leipzig 1900, p. 156.

Stevin begint zijn beschouwing van de halfregelmatige veelvlakken met een bepaling (def. 11) van een afgeknot regelmatig veelvlak, die woordelijk aldus luidt:

Een lichaam, dat in een bol kan worden beschreven, — waarvan de lichaamshoeken alle gelijk en de zijvlakken niet alle gelijkvormig zijn, — waarvan elk zijvlak gelijkhoekig en gelijkzijdig is en alle ribben even lang zijn, noemt men een afgeknot regelmatig lichaam.

Dan volgen elf bepalingen (def. 12 – 22), waarin Stevin zijn negen afgeknotte regelmatige veelvlakken benoemt, en verklaart, hoe ze uit de vijf regelmatige veelvlakken ontstaan; in een opmerking wordt telkens het aantal en de soort der zijvlakken, alsmede het aantal der lichaamshoeken en der ribben opgegeven. Wegens den dubbelen oorsprong van twee der veelvlakken wordt hun aantal door dat der bepalingen met twee overtroffen.

De „novem truncata corpora regularia" van Stevin heeten:

1) truncatum tetraedrum per laterum tertias (def. 12; No. 1 van onze lijst).

2) truncatus cubus per laterum media (def. 13; No. 11 van onze lijst).

3) truncatus cubus per laterum diuifiones in tres partes (def. 14; No. 2 van onze lijst).

4) biftruncatus cubus primus (def. 15; No. 9 van onze lijst).

5) biftruncatus cubus fecundus (def. 16; No. 7 van onze lijst).

6) truncatum octaedrum per laterum media (def. 17; No. 11 van onze lijst).

7) truncatum octaedrum per laterum tertias (def. 18; No. 4 van onze lijst).

8) truncatum dodecaedrum per laterum media (def. 19; No. 12 van onze lijst).

9) truncatum dodecaedrum per laterum diuifiones in tres partes (def. 20; No. 3 van onze lijst).

10) truncatum icofaedrum per laterum media (def. 21; No. 12 van onze lijst).

11) truncatum icofaedrum per laterum tertias (def. 22; No. 5 van onze lijst).

Uit deze benamingen blijkt, dat van de afgeknotte regelmatige veelvlakken door Stevin één van het viervlak, vier van

den kubus, twee van het achtvlak, twee van het twaalfvlal en twee van het twintigvlak worden afgeleid; de veelvlakken in def. 13 en def. 18 als truncatus cubus- en truncatun octaedrum per laterum media beschreven, zijn identisch (No. 1: van onze lijst); evenzoo die, in def. 19 en def. 21 als trun catum dodecaedrum- en truncatum icosaedrum per laterun media beschreven (No. 12 van onze lijst). Zondert men d(„bistruncati cubi" van def. 15 en def. 16 uit, dan ontstaar Stevin's afgeknotte regelmatige veelvlakken, door van de regel matige veelvlakken aan de hoekpunten congruente regelmatige pyramiden af te snijden. Dit afknotten kan geschieden „pei laterum media", „per laterum tertias" en „per laterum diuisiones in tres partes"; bij de 1e handelwijze moet men de ribben in twee even groote stukken verdeelen, bij de 2e in drie even groote stukken en bij de 3e in drie stukken, waarvan het middelste tot ieder van de uiterste staat als de diagonaal van een zijvlak tot de zijde.

De 1e handelwijze kan op elk regelmatig veelvlak worden toegepast. Telt het regelmatige veelvlak Z n-hoekige zijvlakken, H ν-zijdige veelvlakshoeken en R ribben, dan ontstaat er, mits $n \neq \nu$ zij, een halfregelmatig veelvlak met Z n-hoekige en H ν-hoekige, d. i. samen $Z + H = R + 2$, zijvlakken, R vierzijdige veelvlakshoeken en 2R ribben. Uit een viervlak ontstaat evenwel, daar $n = \nu = 3$ is, geen halfregelmatig veelvlak, maar een viervlak; een zes- en een achtvlak leveren een zelfde halfregelmatig veelvlak op, evenals een twaalf- en een twintigvlak, wat zijn grond vindt in de omstandigheid, dat zes- en achtvlak en twaalf- en twintigvlak elkanders poolfiguren zijn, zoodat Z en n bij het eene veelvlak dezelfde waarden hebben als H en ν bij het andere.

Door afknotting „per laterum media" ontstaan dus twee halfregelmatige veelvlakken, Nos. 11 en 12 van onze lijst.

De 2e handelwijze kan slechts op een regelmatig veelvlak worden toegepast, waarvan de zijvlakken driehoeken zijn, dus op het vier-, acht- en twintigvlak, en de 3e handelwijze slechts op een, waarvan de zijvlakken vier- of vijfhoeken zijn, dus op het zes- en twaalfvlak.

Door afknotting „per laterum tertias" en „per laterum diuisiones in tres partes" ontstaan dus vijf halfregelmatige veelvlakken, Nos. 1, 4, 5, 2 en 3 van onze lijst, met Z $2n$-

hoekige en H ν-hoekige, d. i. samen $Z + H = R + 2$, zijvlakken, 2R driezijdige veelvlakshoeken en 3R ribben.

De „biſtruncati cubi" eindelijk ontstaan, zooals de naam reeds uitdrukt, door een kubus tweemaal af te knotten. Aldus:

Verdeelt men van een kubus elke ribbe in drie stukken, waarvan het middelste tot ieder van de twee uiterste staat als de diagonaal van een vierkant tot de zijde, en snijdt men van den kubus bij elke ribbe een driezijdig prisma af door een vlak, dat door de vier deelpunten gaat, die het dichtst bij die ribbe liggen, dan houdt men een veelvlak over met o. a. zes zijvlakken, dat vierkanten zijn, die van de zijvlakken van den kubus zijn overgebleven, en acht hoekpunten, die verder van het middelpunt van den kubus verwijderd zijn dan de overige hoekpunten; snijdt men van dit veelvlak bij ieder dier acht hoekpunten een driezijdige pyramide af door een vlak, dat van de hoekpunten dier zes zijvlakken de drie bevat, die het dichtst bij dat hoekpunt liggen, dan houdt men een halfregelmatig veelvlak over met acht driehoekige en achttien vierhoekige zijvlakken, vierentwintig hoekpunten en achtenveertig ribben, dat bij Stevin „biſtruncatus cubus primus" heet.

En verdeelt men van een kubus elke ribbe in vijf stukken, waarvan het middelste tot ieder van de vier uiterste staat als de diagonaal van een vierkant tot de zijde, en snijdt men van den kubus bij elke ribbe een driezijdig prisma af door een vlak, dat door de vier deelpunten gaat, die het dichtst bij die ribbe liggen, dan houdt men een veelvlak over met o. a. zes zijvlakken, dat vierkanten zijn, die van de zijvlakken van den kubus zijn overgebleven, en acht hoekpunten, die verder van het middelpunt van den kubus verwijderd zijn dan de overige hoekpunten; verdeelt men van dit veelvlak ieder van de zijden dier zes zijvlakken in drie stukken, waarvan het middelste tot ieder van de twee uiterste staat als de diagonaal van een vierkant tot de zijde, en snijdt men van dit veelvlak bij ieder dier acht hoekpunten een veelvlak af door een vlak, dat van de deelpunten op de zijden dier zes zijvlakken de zes bevat, die het dichtst bij dit hoekpunt liggen, dan houdt men een halfregelmatig veelvlak over met twaalf vierhoekige, acht zeshoekige en zes achthoekige zijvlakken, achtenveertig hoekpunten en tweeënzeventig ribben, dat bij Stevin „biſtruncatus cubus ſecundus" heet.

Evenals door Stevin zijn door Kepler blijkens de bijvoeging „truncus" sommige halfregelmatige lichamen als afgeknotte veelvlakken opgevat. Waar evenwel Stevin de wijze van ontstaan dier veelvlakken angstvallig naspeurt en van Dürer's lichamen zelfs een verwerpt, omdat hij er den oorsprong niet met zekerheid van kan vaststellen, laat Kepler zich bij de toekenning van het attribuut „truncus" door den algemeenen indruk leiden, dien de halfregelmatige veelvlakken op hem maken.

Zoo heet Stevin's „biſtruncatus cubus ſecundus" bij Kepler „cuboctaëdron truncum". Nu telt een cuboctaëdron — No. 11 van onze lijst — acht driehoekige en zes vierhoekige zijvlakken en twaalf vierzijdige veelvlakshoeken, en een cuboctaëdron truncum — No. 7 van onze lijst — twaalf vierhoekige, acht zeshoekige en zes achthoekige zijvlakken. Bij ieder van de twaalf hoekpunten van een cuboctaëdron zou men dus een vierzijdige pyramide moeten afsnijden, om een cuboctaëdron truncum over te houden; van de acht driehoekige en de zes vierhoekige zijvlakken zouden dan tevens acht zeshoekige en zes achthoekige zijvlakken overblijven, zooals vereischt wordt. Maar al deze zijvlakken moeten regelmatige veelhoeken wezen: men zou de zijden der driehoeken dus in drie even groote stukken moeten verdeelen en die der vierhoeken in drie stukken, waarvan het middelste tot ieder van de uiterste staat als de diagonaal van een vierkant tot de zijde. Aan deze twee voorwaarden kan evenwel niet gelijktijdig worden voldaan, zoodat Stevin's „biſtruncatus cubus ſecundus" inderdaad niet als „cuboctaëdron truncum" kan worden opgevat.

Evenmin is Kepler's „icoſidodecaëdron truncum" — No. 8 van onze lijst — een afgeknot „icosidodecahedron" — No. 12 van onze lijst.

Hebben, evenals Kepler na hem, vermoedelijk reeds meerderen vóór Stevin in de Archimedische lichamen verminkte regelmatige veelvlakken herkend, zonder evenwel den aard dier verminking nauwkeurig te kunnen omschrijven, aan onzen scherpzinnigen stamgenoot komt de eer toe, den oorsprong van negen dier lichamen in bijzonderheden te hebben aangewezen, onder toepassing van handelwijzen, waardoor, zooals sedert gebleken is, ook de vier overige van regelmatige veelvlakken kunnen worden afgeleid, en die in het wegsnijden van hoekpunten en ribben bestaan.

Zoo ontstaat van de Archimedische veelvlakken van onze lijst:

a) door het wegsnijden van hoekpunten, No. 1 uit een tetraëder, No. 2 uit een hexaëder, No. 3 uit een dodecaëder, No. 4 uit een octaëder, No. 5 uit een icosaëder, No. 11 uit een hexaëder en een octaëder, en No. 12 uit een dodecaëder en een icosaëder;

b) door het wegsnijden van hoekpunten en van ribben door vlakken, evenwijdig aan die ribben, No. 4 uit een tetraëder, No. 7 uit een hexaëder en een octaëder, No. 8 uit een dodecaëder en een icosaëder, No. 9 uit een hexaëder en een octaeder, en No. 13 uit een dodecaëder en een icosaëder;

c) door het wegsnijden van hoekpunten en van ribben door vlakken, niet-evenwijdig aan die ribben, No. 14 uit een hexaeder (zooals Stevin reeds vermoedde) en een octaëder, en No. 15 uit een dodecaëder en een icosaëder [1]).

Het 3e boek van Stevin's Problemata Geometrica handelt evenwel niet alleen over de negen afgeknotte regelmatige veelvlakken, maar ook over de vijf regelmatige veelvlakken zelf, alsmede over de vijf vermeerderde veelvlakken, die ontstaan, door op de zijvlakken der regelmatige veelvlakken als grondvlakken pyramiden te construeeren, waarvan alle ribben even lang zijn. Om ieder van deze negentien veelvlakken kan een bol worden beschreven, die echter bij de vermeerderde regelmatige veelvlakken slechts door de toppen der pyramiden gaat.

Op de „definitiones quinque corporum regularium, quinque auctorum corporum regularium & nouem truncatorum corporum regularium" laat Stevin volgen de constructie *a*) van de ribben, *b*) van de netwerken dier veelvlakken, als de straal van den omgeschreven bol gegeven is.

De ribben van de vijf regelmatige veelvlakken construeert hij op nagenoeg dezelfde wijze als Euclides (Lib. XIII, Propos. 18 der Elementen): in Fig. 14 is $EA = EC = R$, $EF = \frac{1}{3}R$, $CH = 2R$, enz., dus:

$AG = \frac{2}{3}R\sqrt{6} =$ de ribbe van het regelmatige viervlak;

$CG = \frac{2}{3}R\sqrt{3} =$ de ribbe van het regelmatige achtvlak;

$BC = R\sqrt{2} =$ de ribbe van het regelmatige zesvlak;

1) Brückner, t.a.p., pp. 134—139.

CK $= \frac{1}{3}R\sqrt{3} \,.\, (\sqrt{5} - 1) =$ het grootste stuk van de in uiterste en middelste reden verdeelde ribbe CG van het regelmatige achtvlak $=$ de ribbe van het regelmatige twaalfvlak;

CI $= \frac{1}{5}R\sqrt{5} \,.\, \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} =$ de zijde van den regelmatigen vijfhoek met IL $= \frac{2}{5}R\sqrt{5}$ tot straal $=$ de ribbe van het regelmatige twintigvlak.

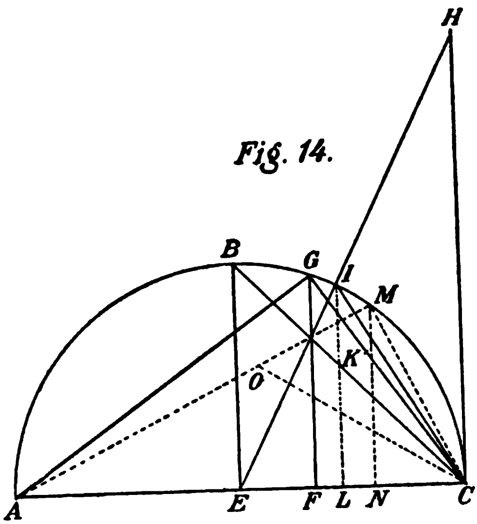


Fig. 14.

De stippellijn IL komt in Stevin's figuur niet voor, evenmin als de overige stippellijnen, die de constructie van de ribbe CO van het regelmatige twintigvlak bij Euclides aangeven: CN $= \frac{2}{5}$R, MO $=$ de zijde van den regelmatigen tienhoek met CM $= \frac{2}{5}R\sqrt{5}$ tot straal.

Om de ribben a' van de vijf vermeerderde en de negen afgeknotte regelmatige veelvlakken te vinden, die in den bol met den straal R (EA in Fig. 14) beschreven kunnen worden, bepaalt Stevin de stralen R′ van de omgeschreven bollen der veelvlakken, die uit de regelmatige veelvlakken met de ribben a (AG, CG, BC, CK en CI in Fig. 14) door vermeerdering en afknotting ontstaan en construeert a' als 4e evenredige tot R, R′ en a; Stevin past dus, zonder dit evenwel uitdrukkelijk te vermelden, zijn „regula falsi continuæ quantitatis” toe.

Wat de constructie van de stralen R′ aangaat, zal ik mij tot een paar voorbeelden bepalen.

Om den straal R′ te vinden van het „dodecaedrum auctum”, waarvan het dodecaëder met de ribbe CK de kern vormt, snijdt Stevin dit dodecaëder en den omgeschreven bol door een plat vlak, dat door twee overstaande ribben, vier hoogtelijnen van zijvlakken en het middelpunt van het veelvlak gaat. De doorsnede bestaat uit een cirkel met den straal R (EA in Fig. 14) en een zeshoek zonder inspringende hoeken, waarvan

de zijden twee aan twee evenwijdig loopen, vier hoekpunten in den cirkelomtrek liggen en twee er binnen vallen. Van dezen zeshoek construeert Stevin in den halven cirkel, die in Fig. 14 ontbreekt, de eene helft A 12 C zóó, dat A1 = CK een koorde en 12 = C2 = de loodlijn is, die in een regelmatigen vijfhoek met de zijde CK uit een hoekpunt op de overstaande zijde kan worden neergelaten. Eindelijk trekt hij E3 ⊥ C2 en beschrijft uit C met CK als straal een cirkelboog, die E3 in 5 snijdt: E3 is dan de straal R′ van den bol, die om het „dodecaedrum auctum'' kan worden beschreven, waarvan het dodecaëder met de ribbe CK de kern vormt; want als C2 door E3 in (51) wordt gesneden, dan is E (51) de straal van den bol, die in het dodecaëder met de ribbe CK kan worden beschreven, en (51) 5 de hoogte van de pyramiden, waarmede dit veelvlak vermeerderd is.

En den straal R′ van het „truncatum tetraedrum per laterum tertias'', dat aan het tetraëder met de ribbe AG zijn oorsprong ontleent, construeert Stevin, door AG in drie even groote stukken te verdeelen en E met een van de deelpunten te verbinden.

Wat eindelijk de netwerken van al deze lichamen aangaat, die van de regelmatige veelvlakken hebben den tegenwoordigen Euclidischen vorm, die van de afgeknotte regelmatige veelvlakken zijn, op die van de drie door Stevin zelf ontdekte na, aan Dürer ontleend, en die van de vermeerderde regelmatige veelvlakken bepalen zich tot de zijoppervlakken van de pyramiden, die op de zijvlakken van de regelmatige veelvlakken komen te staan.

Terwijl van de „regula falſi continuæ quantitatis'', die den inhoud van het 2e boek der Problemata Geometrica uitmaakt, in Stevin's Meetdaet geen spoor te ontdekken valt, vindt men van dien van dit 3e boek in de Meetdaet althans de meeste netwerken terug, zonder meer evenwel: in het 18 Voorstel van het Derde Deel Des Eersten Bovcx Van Het Teyckenen Der Lichamen die van „de vijf gheſchikte lichamen'', t. w. het vier-, ſes-, acht-, twelf- en twintichgrondich lichaam, en in het 19 Voorstel die van „de gheſchickte gheſneen lichamen'', t. w. het geſneen viergrondich deur der ſijden derdendeelen, de gheſneen teerlinck deur der ſijden derdendeelen, de gheſneen teerlinck deur der ſijden middel, de geſneen teerlinck op een

derde manier, de gefneen teerlinck op een vierde manier, de gefneen teerlinck op een vijfde manier, het ghefneen achtgrondich lichaem deur der fijden derdendeelen en het ghefneen twelf- (twintich-) grondich deur der fijden middel, juist de zeven halfregelmatige veelvlakken van Dürer en één van de drie van Stevin, van onze lijst Nos. 1, 2, 11, 14, 9, 7, 4 en 12.

Wij hebben gezien, dat Stevin de afgeknotte regelmatige veelvlakken bij Dürer heeft leeren kennen; thans willen wij nagaan, wat hem aanleiding gaf tot de beschouwing van de vermeerderde regelmatige veelvlakken.

Van de 5^e eeuw v. Chr. af tot op den huidigen dag toe hebben wetenschap en kunst zich de regelmaat van de vijf Platonische veelvlakken ten nutte zoeken te maken, bij wijsgeerige bespiegelingen en theoretische onderzoekingen zoowel als voor practische doeleinden.

Zóó, waar de Pythagoreër Timæus van Locri, Plato's leermeester, van de vier elementen het vuur als viervlak laat optreden, de lucht uit achtvlakken, het water uit twintigvlakken en de aarde uit zesvlakken laat bestaan, om met een twaalfvlak het heelal te omsluiten [1]; — zóó, waar tegen het einde der 16^e eeuw Johannes Kepler, toenmaals „Landschafts-Mathematicus von Steyermark", zijn met zoo schitterenden uitslag bekroonde pogingen, om de Wetten des Hemels te ontcijferen, aanvangt met de ontsluiering „per quinque regularia corpora geometrica" van dit „mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium cœlestium", dat de sferen van Saturnus en Jupiter de om- en ingeschreven bolloppervlakken vormen van een hexaëder, die van Jupiter en Mars van een tetraëder, die van Mars en de Aarde van een dodecaëder, die van de Aarde en Venus van een icosaëder en die van Venus en Mercurius eindelijk van een octaëder [2]; — zóó, waar „die Theorie

---

1) Cantor, t. a. p., I p. 148.

2) Terra est Circulus menfor omnium: Illi circumfcribe Dodecaetron: Circulus hoc comprehendens erit Mars. Marti circumfcribe Tetraedron: Circulus hoc comprehendens erit Iupiter. Ioui circumfcribe Cubum: Circulus hunc comprehendens erit Saturnus. Iam terræ infcribe Icofaedron: illi infcriptus Circulus erit Venus. Veneri infcribe Octaedron: Illi infcriptus Circulus erit Mercurius. Habes rationem numeri planetarum.

Kepler, Prodromus Dissertationum Cosmographicarum, Frankfort 1621, p. 10 (verscheen oorspronkelijk in 1596 te Tubingen).

des Ikosaeders in den letzten Jahren für fast alle Gebiete der modernen Analysis" van belang geworden is [1]; — zóó, waar „de ouden eertijts vande ghefchikte [lichamen] dobbelfteenen pleghen te maken, t'welck fommighe defes tijts noch navolghen, teyckenende oock Sonwijfers op verfcheyden platten die tot den voorgeftelden fichteinder connen befchenen worden", en velerlei afgeleide vormen o. a. in de bouwkunst „tot cyraet ftrecken" [2]).

Met zulke vormen hebben zich vóór Stevin, behalve Archimedes, Hermolaus Barbarus, Patriarch van Aquileja [3]), Pacciuolo [4]), De Foix-Candalla [5]) en Jamitzer [6]) bezig gehouden.

Omtrent Barbarus' werk zijn mij geen bijzonderheden bekend. Pacciuolo behandelt in zijn Divina Proporzione, Venetië 1509, uitvoerig het afsnijden (abscindere) en verhoogen (elevare) van regelmatige en halfregelmatige veelvlakken; De Foix-Candalla beschrijft in het 17e boek van zijn uitgaaf van Euclides' Elementen, Parijs 1566, de halfregelmatige veelvlakken Nos. 11 en 12 van onze lijst onder de namen „exoctaedron" en „icosidodecaedron", die evenals bij Kepler zijn samengesteld [7]); in de Perspectiva Corporum Regularium, Neurenberg 1568, van den Neurenberger goudsmid Jamitzer eindelijk vindt men „ein schöne Anleytung, wie auss denselbigen fünf Cörpern one Endt, gar viel andere Cörper, mancherley Art und Gestalt, gemacht und gefunden werden mügen" [8]), waaronder twee worden aangetroffen, die een oppervlakkige gelijkenis vertoonen met Poinsot's dodécaèdres réguliers de deuxième en de troisième espèce (twaalfhoekig stertwaalfvlak en twaalfvlakkige stertwaalfhoek) [9]).

Invloed op Stevin's arbeid hebben de geschriften van Pacciuolo, Candalla en Jamitzer evenwel niet uitgeoefend: immers hij vermeldt ze niet als bronnen, citeert niet Candalla's, maar

---

1) Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884, p. III.

2) Meetdaet, p. 40.

3) Montucla-Strabbe, Historie der Wiskunde, 2e Deel, Amsterdam 1787, p. 169.

4) Kästner, t. a. p., I pp. 417—449.

5) Kästner, t. a. p., I pp. 313—324.

6) Kästner, t. a. p., II pp. 19—24.

7) Zie p. 153 Noot 1).

8) Kästner, t. a. p., II p. 19.

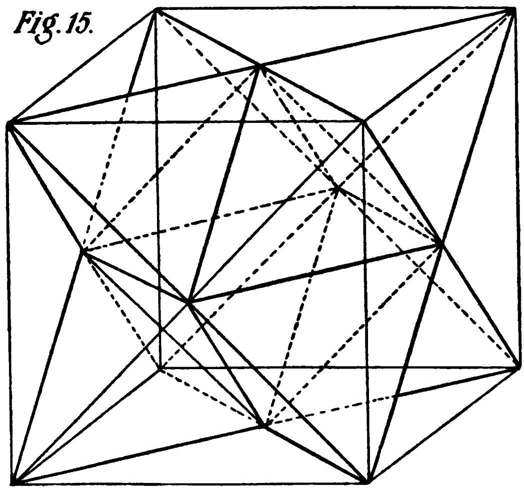
9) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1876, pp. 35—36. Brückner, t. a. p., p. 176 Noot 4).

Clavius' uitgaaf van Euclides' Elementen en spreekt niet van „abscindere" en „elevare", maar van „truncare" en „augere".

Hetzelfde kan niet van Dürer's Geometria gezegd worden: de spaarzame opmerkingen over afknotten en vermeerderen, die voorkomen in dit werk [1]), waarin overigens bij dit onderwerp niet wordt stilgestaan, zouden voor Stevin inderdaad een vingerwijzing hebben kunnen wezen, om in die richting voort te gaan.

Wat het denkbeeld der afknotting aangaat, acht ik dit zelfs niet onwaarschijnlijk, maar dat der vermeerdering werd hem, naar zijn eigen getuigenis, pas later door een vond van Frans Cophart, directeur der Leidsche muziekvereeniging, aan de hand gedaan [2]).

Fig. 15.



Cophart's vond bestond naar diens eigen meening in niets

---

[1]) Quando ab his corporibus per planas abſciſſiones anguli amputantur, & deinde anguli remanentes quoqȝ abſcinduntur, ſic poterunt fieri multiplicia ex his corpora. Ex his rebus varia fieri poſſunt, cū pars earū tranſponitur inter ſe, id quod ad exciſionem ſtatuarū & columnarum earum'qȝ ornatū conducit.

Dürer, t. a. p., p. 158.

In his etiam corporibus ſup ſingulas ſuperficies planas poteris ſtatuere pūctum acutum, altum, aut depreſſum facere, tot quidem angulorum quot fuerint anguli in ſuperficie ſuper quam ſteterit punctus. Dürer, t. a. p., p. 150.

[2]) Poſtea verò factum eſt (recitamus hæc quia aliquando non iniucundum eſt inventionum occaſiones non ignorare) vt Franciſcus Cophart Archimuſicus noſtri Leidenſis Muſicorum collegij, & Geometriæ ſingularis amator, vellet mihi perſuadere ſe caſu quodam ſextum corpus regulare vidiſſe, cuius conſtructio talis erat: . . . . p. 47.

minder dan de constructie van een zesde regelmatig veelvlak als overschot van een kubus, waarvan bij de ribben viervlakken zijn weggesneden, die de uiteinden dier ribben en de middelpunten van de in die ribben samenkomende zijvlakken tot hoekpunten hebben (Fig. 15).

Stevin bestreed de bewering van zijn stadgenoot met de opmerking, dat diens „sextum corpus regulare" een der kenmerken van een regelmatig veelvlak mist: de veertien hoekpunten liggen niet op een zelfde, maar in groepen van zes en acht op twee verschillende concentrische bolopperviakken. [1])

Bij nadere beschouwing bleek hem, dat Cophart's veelvlak uit een regelmatig achtvlak bestaat met op ieder zijvlak als basis een regelmatig viervlak. En het was dit denkbeeld, dat hem tot de constructie van zijn vermeerderde regelmatige veelvlakken aanleiding gaf. [2])

Een niet zeer vruchtbaar denkbeeld voorzeker! Had Stevin daarentegen in verbinding der hoekpunten van een regelmatig zesvlak, in uitbreiding der zijvlakken van een regelmatig achtvlak den oorsprong van Cophart's veelvlak herkend, wellicht was hij er dan in geslaagd aan de regelmatige twaalf- en twintigvlakken de ontdekking van een paar andere regelmatige sterveelvlakken te ontleenen, zelfs al was hem de ware aard dier veelvlakken verborgen gebleven, evenals Cophart vermoedelijk in zijn zesde regelmatig veelvlak niet een regelmatig sterveelvlak met acht driehoekige zijvlakken en evenveel driezijdige drievlakshoeken, maar slechts een regelmatig veelvlak, ingesloten door vierentwintig gelijkzijdige driehoeken, zal hebben gezien.

Inderdaad evenwel opent Cophart's „sextum corpus regulare" als discontinu regelmatig achthoekig achtvlak de rij der regelmatige sterveelvlakken, waarvan aan Kepler en aan Poinsot de eer der ontdekking toekomt.

---

1) Igitur quia hoc corpus non habebat omnes proprietates quæ in regularibus corporibus requiruntur, concludebamus illud non eſse ſextum corpus regulare. p. 48.

2) Postea verò vidimus tale corpus eſse octoedrum cui appoſita erant octo tetraedra, quorum baſes erant octoedri octo ſuperficies. Cum'que hoc animaduerteremus vnà cùm elegantia ipſius, atque Geometricis rationibus in eo conſiſtentibus, adplicauimus talem conſtructionem ad cetera quatuor regularia corpora, quæ omnia regularia aucta vocauimus. p. 48.

In zijn Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres (Journal de l'Ecole Polytechnique, 10ième Cahier, Tome IV, Parijs 1810, pp. 35—36) laat Poinsot zich aldus uit:

„Mais, si, en conservant toujours la définition générale des solides réguliers, on étend, comme on le doit, celle de la convexité, on voit la possibilité de construire de nouveaux polyèdres réguliers, non-seulement avec les nouveaux polygones que j'ai considérés, mais même avec les polygones réguliers ordinaires: et pour bien entendre ceci, il faut commencer par distinguer nettement dans un polyèdre, ses faces, ses arêtes et ses sommets.

Comme un même polyèdre peut paraître également construit sous tels ou tels polygones, je prendrai pour les faces, les plans qui, en plus petit nombre, achèvent complètement ce même polyèdre . . . .

Pour les arêtes, ce sont les côtés mêmes qui terminent les faces du solide, et par lesquels ces faces se joignent deux à deux; de sorte que chaque arête sert de côté à deux faces adjacentes, et qu'ainsi le nombre des arêtes est égal à la moitié du nombre des côtés de toutes les faces.

C'est à ces seules droites, comme faîtes, que se trouvent les angles dièdres du solide, les autres angles que pourraient former les faces en se traversant, n'en font point partie: et de même, c'est aux seuls points où se réunissent les extrémités des arêtes que sont les sommets et les angles solides du polyèdre.

Cela posé, je dis que l'on peut construire de nouveaux polyèdres parfaitement réguliers . . . : ils ont tous leurs faces égales et régulières, également inclinées deux à deux, et assemblées en même nombre autour de chaque sommet. Ils peuvent être inscrits et circonscrits à la sphère . . . . La différence essentielle de ces solides aux polyèdres ordinaires, est que, dans ceux-ci, les faces étant projetées par des rayons sur la sphère inscrite ou circonscrite, les polygones correspondans recouvrent une seule fois la sphère; au lieu que dans les autres, ces polygones la recouvrent exactement ou deux fois, ou trois fois, &c.; et cela d'une manière uniforme, en sorte que la surface est par-tout ou doublée, ou triplée, &c." [1])

[1]) Uit Kepler's beschrijving van zijn twaalfhoekig en twintighoekig ster-twaalfvlak (Poinsot's dodécaèdres réguliers de deuxième et de quatrième espèce)

Van elk zoodanig sterveelvlak eindelijk vallen de hoekpunten met de hoekpunten en de zijvlakken met de zijvlakken van een convex regelmatig veelvlak samen. [1])

---

blijkt ondubbelzinnig, dat diens opvatting van een regelmatig sterveelvlak reeds dezelfde was als die van Poinsot:

„Claudunt enim pentagonicæ ſolidas figuras aculeatas undiqꝫ: quarum una fit duodecim angulorum quinquelinearium, altera viginti angulorum trilinearium: illa trinis angulis inſiſtit, hæc quinis ſimul; illa pulchriùs ſuper angulum erigitur; hæc rectius ſedet, incumbens in quinos. In his etſi forinſecus non apparet regulare planum, ſed ejus loco Triangulum æquicrurum Pentagonicum; quina tamen hujusmodi ſemper in unum idemqꝫ planum competentia, occultum ſub ſoliditate quinquangulum, veluti cor ſuum circumſtant; faciuntqꝫ cum eo dictam ſtellam pentagonicam, ſeu Germanico Idiomate, pedem Truttæ, Theophraſto Paracelſo ſignum ſanitatis. Idea corporis quodammodo eadem eſt, quæ ſui Plani; Nam vt in hoc, ſc. in ſtella quinquangula, binorum ſemper triangulorum latera in unam rectam competunt, quæ parte ſui interiore fit baſis uni exteriori triangulo, latus verò intimo quinquangulo: ſic in ſolido, ſemper quinorum ſolidorum angulorum Triangula ſingula æquicrura, competunt in unam planitiem, quorum quinqꝫ triangulorum ſeu ſtellæ intima medulla & cor, quinquangulum, fit baſis in unâ ſuperſtantis anguli ſolidi: vel in alterâ, ſupſtantium quinqꝫ ſolidorum. Eſt autem tanta cognatio figurarum harum, unius cum Dodecaëdro, alterius cum Icoſaëdro: vt videantur hæ, præſertim Dodecaëdron, trunca quodammodo & mutila, ſi cum illis aculeatis comparentur."

Kepler, Harmonices Mundi Libri V, Lintz 1619, Lib. II, XXVI. Propos., p. 60.

[1]) Un polyèdre régulier, de quelque espèce qu'il soit, a nécessairement les mêmes sommets qu'un polyèdre régulier convexe.

Bertrand, Note sur la Théorie des Polyèdres Réguliers (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Tome XLVI, Parijs 1858, p. 80).

Je dis de plus, que la régularité du polyèdre d'espèce supérieure entraîne nécessairement la régularité du polyèdre de première espèce qui lui sert de noyau.

Cauchy, Recherches sur les Polyèdres (Journal de l'Ecole Polytechnique, 16ième Cahier, Tome IX, Parijs 1813, p. 70).

Bij Poinsot's sterveelvlakken:

1) het dodécaèdre étoilé de seconde espèce (twaalfhoekig stertwaalfvlak van de 3e soort);

2) het dodécaèdre de troisième espèce (twaalfvlakkige stertwaalfhoek van de 3e soort);

3) het dodécaèdre étoilé de quatrième espèce (twintighoekig stertwaalfvlak van de 7e soort);

4) het icosaèdre de septième espèce (twintigvlakkige stertwaalfhoek van de 7e soort);

vallen de hoekpunten van Nos. 1, 2 en 4 met die van een convex regelmatig twintigvlak samen en de hoekpunten van No. 3 met die van een convex regelmatig twaalfvlak, en sluiten de zijvlakken van Nos. 1, 2 en 3 een convex regelmatig twaalfvlak in en de zijvlakken van No. 4 een convex regelmatig twintigvlak.

Cophart's veelvlak bezit al de opgesomde kenmerken: zijn zijvlakken zijn congruente regelmatige driehoeken, zijn veelvlakshoeken congruente regelmatige drievlakshoeken; zijn hoekpunten vallen samen met die van een regelmatig zesvlak, zijn zijvlakken sluiten een regelmatig achtvlak in; met dit zesvlak heeft het den omgeschreven, met dit achtvlak den ingeschreven bol gemeen; zijn middelpuntsprojectie op het omgeschreven boloppervlak bedekt dit 2-maal; — doordat het uit twee congruente regelmatige veelvlakken is samengesteld, waarvan de ribben elkander twee aan twee rechthoekig middendoor deelen, onderscheidt het zich evenwel van Poinsot's vier regelmatige sterveelvlakken door de omstandigheid, dat niet elke twee hoekpunten door een heele-ribbentrek verbonden zijn: Cophart's achthoekig achtvlak vormt dus een discontinu regelmatig sterveelvlak van de 2e soort. [1])

Niet bij Jamitzer alzoo, in diens Perspectiva Corporum Regularium, Neurenberg 1568, ontmoet men in de geschiedenis der wiskundige wetenschappen het 1e regelmatige sterveelvlak [2]), maar in Stevin's Problemata Geometrica, Antwerpen 1583, en dit 6e regelmatige veelvlak was een vond van den Leidschen muziek-directeur, liefhebber der wiskunst, Frans Cophart.

Het 4e boek van de Problemata Geometrica handelt over de constructie van een meetkundig lichaam, gelijkvormig met een van twee gegeven meetkundige lichamen en even groot als het andere.

---

[1]) Naast de vijf convexe regelmatige veelvlakken bestaan er zeven regelmatige sterveelvlakken: de vier continue sterveelvlakken van Poinsot en drie discontinue sterveelvlakken van de 2e, de 5e en de 10e soort:

1) het achthoekig achtvlak van Cophart;

2) een twintighoekig twintigvlak;

3) een twintighoekig veertigvlak.

No. 1 bestaat uit twee, No. 2 uit vijf en No. 3 uit tien concentrische congruente regelmatige viervlakken; van No. 1 vallen de hoekpunten samen met die van een regelmatig zesvlak, van Nos. 2 en 3 met die van een regelmatig twaalfvlak: van No. 1 sluiten de zijvlakken een regelmatig achtvlak in, van Nos. 2 en 3 een regelmatig twintigvlak. Het twintighoekige veertigvlak is uit twee symmetrische twintighoekige twintigvlakken samengesteld, waarvan de hoekpunten en de zijvlakken samenvallen. (Verg. Brückner, t. a. p., pp. 167—169.)

[2]) Günther, t. a. p., p. 36.

In de inleiding merkt Stevin op, dat dit werkstuk beantwoordt aan de constructie van een veelhoek, gelijkvormig met een van twee gegeven veelhoeken en even groot als de andere, door Euclides in zijn Elementen, Lib. VI, Propos. 25, beschreven, en dat het voor bolsegmenten reeds werd opgelost door Archimedes in zijn werk Over den Bol en den Cylinder, Lib. II, Propos. 5.

Aan het einde van zijn beschouwingen vat Stevin de kern van zijn handelwijze samen in een „theorema" van dezen inhoud:

Stelling: Zijn D_1 en D_2 de middellijnen der grondvlakken en $H_1 = H_2$ de hoogten van de kegels K_1 en K_2, en construeert men:

a) P als 3ᵉ evenredige tot D_1 en D_2:

$$D_1 : D_2 = D_2 : P; \qquad \ldots (1)$$

b) D en Q als middelevenredigen tusschen D_1 en P:

$$D_1 : D = D : Q = Q : P; \qquad \ldots (2)$$

c) H als 4ᵉ evenredige tot D_1, H_1 en D:

$$D_1 : H_1 = D : H; \qquad \ldots (3)$$

dan is de kegel K met D als middellijn van het grondvlak en H als hoogte $\sim K_1$ en $= K_2$.

Bewijs: Uit (3) volgt onmiddellijk, dat de kegels K_1 en K gelijkvormig zijn.

Verder volgt uit (1), dat de verhouding van D_1 en P naar de zegswijze van Stevin [1]) 2-maal zoo groot is als die van D_1 en D_2; ook is de verhouding van de grondvlakken der kegels K_1 en K_2 2-maal zoo groot als die van hun middellijnen D_1 en D_2: de grondvlakken der even hooge kegels K_1 en K_2, dus ook hun inhouden, verhouden zich derhalve als D_1 en P.

Eindelijk volgt uit (2), dat de verhouding van D_1 en P 3-maal zoo groot is als die van D_1 en D; ook is de verhouding van de inhouden der gelijkvormige kegels K_1 en K 3-maal zoo groot als die van de middellijnen D_1 en D van hun grondvlakken: de inhouden der kegels K_1 en K verhouden zich derhalve als D_1 en P.

---

1) Zie p. 131.

Evenzoo verhouden zich de inhouden der kegels K_1 en K_2: de kegels K_2 en K zijn dus even groot.

Stevin's constructie laat zich eenigszins bekorten, als men opmerkt, dat uit de voorwaarden van het werkstuk, t.w.:

$$D : H = D_1 : H_1,$$

$$\tfrac{1}{12}\pi D^2 H = \tfrac{1}{12}\pi D_2^{\,2} H_2,$$

$$H_1 = H_2,$$

volgt, dat $D = \sqrt[3]{D_1 D_2^{\,2}}$, dus de 2e van de beide middelevenredigen tusschen D_1 en D_2 is: de constructie van de 3e evenredige tot D_1 en D_2 komt dan te vervallen.

Na deze voorbereiding gaan we tot het algemeene werkstuk over:

Een lichaam L te beschrijven $\sim L_1$ en $= L_2$.

De constructie luidt bij Stevin aldus:

a) Verander L_1 in een kegel K_1 en L_2 in een kegel K_2;

b) verander K_2 in een kegel K' van dezelfde hoogte als K_1;

c) construeer de middellijn van het grondvlak van een kegel $K \sim K_1$ en $= K'$;

d) construeer $L \sim L_1$ en $= K'$.

Bij ieder van de vier onderdeelen van de constructie moeten we even stilstaan.

Elk meetkundig lichaam kan volgens Stevin in een kegel veranderd worden, zooals hij in zijn Geometria nader zal uiteenzetten.[1] Inderdaad vindt men in de Meetdaet (6 Bovck, 31—34 Voorstel) de „verkeering" in een kegel behandeld van een keghelſche, een corte keghel, een clootſche en een cloot, een coordſne en een middellijnſne van een clootſche en een cloot. In de Problemata Geometrica bepaalt hij zich, in aansluiting bij Archimedes, tot de verandering van een bolsegment in een kegel met hetzelfde grondvlak:

Is de hoogte van het segment $= H$ en de straal van den bol, waarvan het deel uitmaakt $= R$, dan is de hoogte van den kegel $= H(3R - H) / (2R - H)$, d. i. de 4e evenredige tot $2R - H$, $(2R - H) + R$ en H.

Op even eenvoudige wijze laat zich een kegel in een kegel

---

[1]) . . . omni corpori Geometrico . . . æqualis conus poteſt deſcribi (quarum deſcriptionum Problemata in nostra Geometria ordine collocabimus). . . . p. 100.

van gegeven hoogte veranderen, mét name K_2 in een kegel K' van dezelfde hoogte als K_1: Is van K_2 de hoogte $= H_2$ en de middellijn van het grondvlak $= D_2$ en van K_1 de hoogte $= H_1$, dan is de middellijn van het grondvlak van $K' = D_2 \sqrt{H_1 H_2} / H_1$, d.i. de 4ᵉ evenredige tot $\sqrt{H_1 H_2}$, H_1 en D_2.

De middellijn van het grondvlak van den kegel $K \backsim K_1$ en $= K'$ wordt vervolgens gevonden door uitvoering van de beide eerste constructies, in Stevin's hoofdstelling vermeld.

Bedenkt men eindelijk, dat de kegels, waarin men, bij toepassing van een zelfde handelwijze, gelijkvormige lichamen kan veranderen, eveneens gelijkvormig zijn, dan levert de constructie van het lichaam $L \backsim L_1$ en $= K'$ geen moeilijkheden meer op, daar men van de gelijkvormige kegels $K' = L$ en $K_1 = L_1$ een paar gelijkstandige lijnen, de middellijnen van de grondvlakken, kent.

Stevin past zijn algemeene constructie toe op kegels, op cylinders, op bolsegmenten en, door berekening, op regelmatige vierzijdige pyramiden; de cylinders en pyramiden behoeven blijkbaar niet in kegels veranderd te worden. Bij de bolsegmenten stelt hij naast zijn eigen handelwijze die van Archimedes, waarvan de zijne niet wezenlijk verschilt. [1]) Immers, na, evenals Stevin, de bolsegmenten in de kegels K_1 en K_2 met de grondvlakken dier segmenten als grondvlakken veranderd te hebben, construeert Archimedes:

a) P als 4ᵉ evenredige tot H_1, D_1 en H_2;

b) D en Q als middelevenredigen tusschen D_2 en P;

waarmede de middellijn D van het grondvlak van den kegel $K \backsim K_1$ en $= K_2$ gevonden is.

De verandering van K_2 in een kegel K' van dezelfde hoogte als K_1 bij Stevin was tegenover Archimedes' constructie zeker geen vereenvoudiging.

Zoowel door Stevin als door Archimedes moeten twee middelevenredigen tusschen twee gegeven rechte lijnen geconstrueerd worden. Dit werkstuk verlangt eenige toelichting.

---

[1]) Nota.

Non importune videtur huic Problemati applicari modus conſtructionis Archimedis eiuſdem Problematis, ex propoſitione 5. lib. 2. de ſphæra & cylindro ſumptus, vt cuivis concordantia particularis deſcriptionis problematis Archimedis, cum vniverſali hac noſtra conſtructione ſit manifeſta. p. 96.

Zooals bekend is, werd het Delische vraagstuk der verdubbeling van den kubus, in de 5e eeuw v. Chr. door het orakel te Delphi opgeworpen, door Hippocrates van Chios [1]) teruggebracht tot de bepaling van twee middelevenredigen tusschen twee gegeven rechte lijnen, de ribbe van den kubus en haar 2-voud, een werkstuk, waarvan een meetkundige constructie met passer en liniaal niet mogelijk is, maar dat langs andere wegen o.a. door Archytas, Plato, Eudoxus, Menechmus, Apollonius, Eratosthenes, Hero, Philo van Byzantium, Nicomedes, Diocles en Pappus is opgelost.

Stevin beschrijft Hero's constructie:

Meet, als de middelevenredigen tusschen AB en CD gevonden moeten worden, op de beenen van den rechten hoek FEG

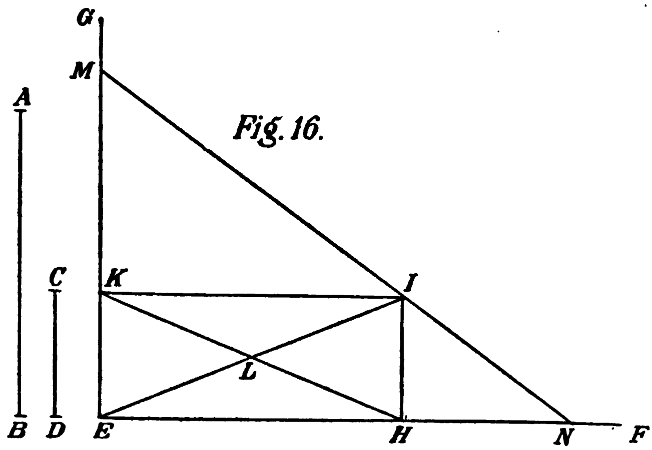


Fig. 16.

(Fig. 16) de stukken EH = AB en EK = CD af, voltooi den rechthoek EKIH en beschrijf uit het snijpunt L der diagonalen als middelpunt een cirkel, die EG in M en EF in N snijdt, zóó, dat de punten M, I en N in één rechte lijn komen te liggen, welk doel men door probeeren moet zien te bereiken: KM en HN zijn dan de gezochte middelevenredigen.

Voor het bewijs verwijst Stevin naar Eutocius' (6e eeuw n. Chr.) commentaar op het 2e boek van Archimedes' Bol en Cylinder, en voor de constructie van middelevenredigen door andere

---

1) Niet te verwarren met diens naamgenoot, den beroemden geneesheer Hippocrates van Cos.

instrumentale hulpmiddelen dan passer en liniaal naar zijn eerlang uit te geven Geometria. [1]) Evenals in de Problemata Geometrica vindt men de constructie in de Meetdaet (4 Bovck, 4 Voorstel, p. 123) echter slechts „na de vondt van Hero" uitgevoerd, met de bijvoeging: „Maer om tusschen twee ghegheven linien meetconstelick te vinden twee of meer middeleveredenighe, soo veel alsser begheert worden daer toe dient den tuych van Eratosthenes deur den voornoemden Eutochius beschreven".

Den wezenlijken inhoud van het 4e boek der Problemata Geometrica vindt men in de Meetdaet terug, alwaar het 28 Voorstel van het Derde Deel Des Sesten Bovcx Van T' Verkeeren Der Lichamen de constructie verlangt van een veelvlak $V \sim V_1$ en $= V_2$.

V_1 en V_2 worden veranderd in rechte prisma's met een zelfde, maar overigens willekeurig grondvlak. [2])

Zijn H_1 en H_2 de hoogten dier prisma's en is R_1 een ribbe van V_1, dan construeert Stevin:

a) P als 4e evenredige tot H_1, H_2 en R_1;

b) R en Q als middelevenredigen tusschen R_1 en P;

en eindelijk $V \sim V_1$ op R als gelijkstandige ribbe van R_1.

Tot lichamen met gebogen vlakken breidt Stevin het werkstuk in de Meetdaet niet uit: vermoedelijk zal hij dit overbodig gerekend hebben na alles wat hij over de verandering dier lichamen in cylinders en kegels mededeelt (6 Bovck, 29—34 Voorstel).

Het 5e boek van de Problemata Geometrica eindelijk handelt over de constructie van een meetkundig lichaam, gelijkvormig

---

[1]) Nota.
Etsi hoc Problema (quamvis non Geometricè) per diuersa instrumenta multifariam à veteribus sit inventum, dabitur tamen hic tantum vnicum exemplum per lineas, secundum modum Heronis. Reliquos modos qui per instrumenta expediuntur, in nostra Geometria suis instrumentis accommodatis breuiter speramus nos edituros. p. 85.

[2]) Door het construeeren van 4e evenredigen kan men een driehoek, dus ook een willekeurigen veelhoek, in een rechthoek van gegeven lengte veranderen; evenzoo een pyramide, dus ook een willekeurig veelvlak, in een recht prisma met gegeven grondvlak (men beginne met de grondvlakken van pyramide en prisma in rechthoeken van dezelfde lengte te veranderen).

met twee gegeven gelijkvormige meetkundige lichamen en even groot als hun som (verschil), een werkstuk, dat een uitbreiding vormt van dat der verdubbeling van den kubus en door Stevin nergens vermeld was gevonden. [1])

Eenige mededeelingen over den door hem bij de oplossing ingeslagen weg knoopt Stevin vast aan de constructie van een vlak, gelijkvormig met twee gelijkvormige vlakken en even groot als hun som.

Om $\triangle$ XY $\sim$ $\triangle$ AB $\sim$ $\triangle$ CD en $=$ $\triangle$ AB $+$ $\triangle$ CD met X, A en C als gelijkstandige zijden te construeeren, gaat Stevin op drie manieren te werk:

1) Hij verandert $\triangle$ AB en $\triangle$ CD in rechthoeken van dezelfde hoogte, $\triangle$ AB in rh. EF en $\triangle$ CD in rh. GH, en construeert $\triangle$ XY $\sim$ $\triangle$ AB en $=$ rh. EF $+$ rh. GH d.i. rh. EH.

2) Hij construeert X als schuine zijde van een rechthoekigen driehoek met A en C als rechthoekszijden.

3) Hij construeert P als 3e evenredige tot A en C, en X als middelevenredige tusschen A en A + P.

De 2e en de 3e handelwijze komen neer op de constructie van $X = \sqrt{(A^2 + C^2)}$ en, in anderen vorm, $= \sqrt{A(A + C^2/A)}$; Stevin beroept zich evenwel bij 2) op de stelling: Als men op de zijden van een rechthoekigen driehoek als gelijkstandige lijnen gelijkvormige vlakken beschrijft, dan zijn de vlakken op de rechthoekszijden samen even groot als dat op de schuine zijde (Eucl., Lib. VI, Propos. 31), en merkt bij 3) op, dat $\triangle$ AB en $\triangle$ CD zich verhouden als A en P, dus $\triangle$ AB en $\triangle$ XY $=$ $\triangle$ AB $+$ $\triangle$ CD als A en A + P, enz.

Om een lichaan XY $\sim$ AB $\sim$ CD en $=$ AB $\pm$ CD met X, A en C als gelijkstandige lijnen te construeeren, kan men, zegt Stevin, de 1e constructie toepassen en, op de in het 4e boek der Problemata Geometrica verklaarde wijze, XY $\sim$ AB en $=$ AB $\pm$ CD construeeren. Maar de 2e en de 3e constructie verdienen de voorkeur, omdat ze zonder vormverandering van figuren „per ſolas lineas" uitgevoerd kunnen worden; de 2e constructie, die bijzonder fraai en eenvoudig is, laat zich evenwel

---

[1]) . . ., ſciendum eſt ſimile generale Problema hocuſque in ſolidis non fuiſſe editum (dixi generale, quoniam Problema illud de duplicatione cubi ſpeciale in ea re eſt) hoc tamen à nobis eſſe inventum . . . . p. 104.

niet uitbreiden tot lichamen; vandaar, dat Stevin de 3e constructie voor dit doel geschikt maakt [1]); aldus:

Hij construeert:

a) P als 3e evenredige tot A en C;

b) Q als 4e evenredige tot A, C en P;

c) X en X′ als middelevenredigen tusschen A en A ± Q; en eindelijk XY ∾ AB op X als gelijkstandig met A; een handelwijze, die neerkomt op de constructie van $X = \sqrt[3]{(A^3 \pm C^3)}$, herleid tot den vorm:

$$X = \sqrt[3]{A^2(A \pm C/A \,.\, C^2/A)}.\ ^{2})$$

Stevin's bewijs luidt evenwel anders:

Uit a) en b) volgt:

$$A : C = C : P = P : Q;$$

de verhouding van A en Q is dus 3-maal zoo groot als die van A en C; ook is de verhouding van de gelijkvormige lichamen A en C 3-maal zoo groot als die van de gelijkstandige lijnen A en C : AB en CD verhouden zich dus als A en Q, en AB en AB ± CD als A en A ± Q.

Uit c) volgt:

$$A : X = X : X' = X' : (A \pm Q);$$

de verhouding van A en A ± Q is dus 3-maal zoo groot als die van A en X; ook is de verhouding van de gelijkvormige lichamen AB en XY 3-maal zoo groot als die van de gelijkstandige lijnen A en X : AB en XY verhouden zich dus als A en A ± Q.

Evenzoo verhouden zich AB en AB ± CD: derhalve is XY = AB ± CD.

De hoofdzaken der constructies vat Stevin weer in „theorema's" samen.

Eindelijk zij opgemerkt, dat men de beide werkstukken van dit 5e boek der Problemata Geometrica, op dezelfde wijze opgelost, in de Meetdaet terugvindt: Problema II (over de

---

1) Cum vero hunc tertium modum inveniſſemus in planis, patefacta nobis eſt via ſimilis inventionis in ſolidis, nam quicquid in ſimilibus planis factum eſt per duplicatam rationem, id fiet in ſolidis per triplicatam rationem, neque aliud (ſi quis rectè animaduertat) invenietur diſcrimen. p. 108.

2) Zie p. 117—118.

optelling van gelijkvormige lichamen) als 9 Voorstel en Problema III (over de aftrekking van gelijkvormige lichamen) als 10 Voorstel in het Derde Deel Des Derden Bovcx Vande vier afcomſten als vergaring, aftrecking, menichvulding, en deeling der lichamen; Problema I (over de optelling van gelijkvormige vlakken) komt voor als 5 Voorstel en het overeenkomstige werkstuk over de aftrekking van gelijkvormige vlakken, dat men in de Problemata Geometrica niet aantreft, als 6 Voorstel in het Tweede Deel Des Derden Bovcx Vande vier afcomſten als vergaring, aftrecking, menichvulding, en deeling der vlacken.

Stevin's Problemata Geometrica (1583), hebben we gezien, vormen een zelfstandig werk, verschillend van diens Meetdaet (1605, 2e Stuck der Wisconstige Gedachtenissen) = Praxis Geometriæ (1605, Tomus II der Hypomnemata Mathematica, de door Snellius bezorgde Latijnsche vertaling van de Wisconstige Gedachtenissen) = Practique de Géométrie (1634, Volume III van Girard's Fransche uitgaaf van de Oeuvres Mathématiques de Stevin).

Hun inhoud vindt men grootendeels in de Meetdaet terug: dien van Lib. I in Bk. 5 (en 4), van Lib. IV in Bk. 6 (en 4) en van Lib. V in Bk. 3; de netwerken van Lib. III eindelijk in Bk. 1; alleen de „regula falſi continuæ quantitatis" van Lib. II treft men in de Meetdaet niet aan; — daarentegen komt alles, wat Stevin in Lib. I over verhoudingen en evenredigheden mededeelt, bijna onveranderd voor in diens Arithmétique (1585).

Vandaar, dat de Latijnsche Problemata Geometrica in de Nederlanden door de Neerduytsche Meetdaet verdrongen werden en door Girard niet, naast dit werk, onder de „Oeuvres Mathématiques" van Stevin zijn opgenomen, een omstandigheid, waardoor diens merkwaardig, maar zeldzaam geschrift in het buitenland nagenoeg onbekend is gebleven.

Aangenaam was mij de taak een poging aan te wenden, om den voorlooper der Meetdaet voor algeheele vergetelheid te helpen bewaren, aangenaam en — leerrijk; want niet vergeefs meestal, o Mirza Schaffy, zoekt, „in alter Bücher Staub vertieft", wie vinden wil, naar „Weisheit und Erfahrung":

There are more things in heaven and earth,
Than are dreamt of in your philosophy.

HAMLET.

AANTEEKENINGEN.

Problematvm / Geometricorvm / In gratiam D. Maximiliani, Domini A / Crvningen &c. editorum, Libri V. / Auctore / Simone Stevinio Brvgense./ Vignet met randschrift: In Dies Arte Ac Fortvna /

Antverpiae, / Apud Ioannem Bellerum ad infigne / Aquilæ aureæ. /

4^0. 19¼ × 15 cM. A1[1], p. 1, *Titel.* A1[2], p. 2, Verzen: *In Geometrica Problemata Simonis Stevinii*, *Lucæ Belleri I. F. Carmen.*, 27 regels; *In Eivsdem Geometrica Problemata Henricus Vuithemius.*, 12 regels. A2, pp. 3—4: *Illvstrissimo Heroi*, *D. Maximiliano*, *Domino Crvningae*, *Crevecvevr*, *Heenvliet*, *Haserwoude*, *Steenkercken*, *Vicecomiti Zelandiae &c. Svpremo Machinarvm Bellicarvm Inferioris Germaniae Praefecto. Simon Stevinivs. S. .P* A3[1]—E3[1], pp. 5—37: *Liber Primvs In Qvo Demonstrabitvr Qvomodo à dato puncto in latere cuiufcunque rectilinei, recta linea Geometricè ducenda fit verfus partem petitam, quæ rectilineum diuidat fecundum rationem datam. Item Qvomodo In Qvocvnqve Rectilineo ducenda erit linea recta & parallela cum latere ipfius quæfito, quæ rectilineum diuidat verfus partem petitam fecundum rationem datam.* E3[2]—F3[1], pp. 38—45: *Liber Secvndvs De Continvae Qvantitatis regula Falfi.* F3[2]—L2[1], pp. 46—83: *Liber Tertivs De Qvinqve Regvlarivm, Qvinque auctorum Regularium & nouem Truncatorum regularium corporum eidem fphæræ infcriptibilium defcriptione.* L2[2]—N3[1], pp. 84—101: *Liber Qvartvs In Qvo Demonstrabitvr Qvomodo datis duobus corporibus Geometricis, tertium corpus defcribi poteft, alteri datorum fimile, alteri vero æquale.* N3[2]—P3[2], pp. 102—118: *Liber Qvintvs In Qvo Demonstrabitvr Qvomodo datis quibufcunque duorum fimilium Geometricorum corporum homologis lineis, tertium corpus conftrui poteft datis duobus æquale, & alteri datorum fimile. Item quomodo datis quibufcunque duobus fimilium & inæqualium Geometricorum corporum homologis lineis, tertium corpus conftrui poteft tanto minus dato maiore, quantum eft datum minus, & alteri datorum fimile.* P4[1], *Epilogus.* en *Errata.* 16 regels. P4[2], wit.

[Een exemplaar van dit werk bezitten de Bibliotheek der

Rijksuniversiteit te Leiden, de Stadsbibliotheek te Antwerpen de Bibliothèque Royale de Belgique te Brussel en de Bibliothee van de Université Catholique te Leuven.]

LIBER PRIMVS.

24 Definitiones [1]; 8 Problemata [2]; 30 figuren [3].

Magnitudinum, quæ & termini dicuntur, comparatio eſt in
- Ratione quæ eſt
  - Regularis
    - Poſitiua defi. 2.
    - Mutata
      - Transformata defi. 8.
      - Inverſa defi. 9.
  - Irregularis, vt perturbata defi. 10.
- Proportione quæ est
  - Regularis
    - Poſitiua. defi. 12.
    - Mutata
      - Transformata defi. 19.
      - Inverſa defi. 20.
      - Alterna defi. 21.
  - Irregularis, vt perturbata defi. 22.

Definitio 1. Terminus eſt vna finita magnitudo.

Definitio 2. Ratio magnitudinum eſt diuerſorum terminorum eiuſdem generis magnitudinis mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo.

Definitio 3. Ratio in duobus terminis paucifsimis conſiſtit.

Definitio 4. Binaria ratio eſt, quæ in duobus terminis conſiſtit Ternaria vero ratio quæ in tribus terminis: Et ſic pari ordine ſecundum multitudinem terminorum vocabitur ratio.

Definitio 5. Æquales rationes ſunt, quarum termini ſunt multitudine pares, & vt vnius rationis primi termini quantitas, ad ſecundi termini quantitatem: ſic alterius rationis primi termini quantitas ad ſecundi termini quantitatem. Si vero rationes eſſent ternariæ tunc vt vnius rationis primi termini quantitas, ad ſecundi, & ſecundi ad tertii: ſic alterius rationis primi termini quantitas, ad ſecundi & ſecundi ad tertii: & ſic deinceps pari ordine in omnibus rationibus ſecundum multitudinem terminorum.

Definitio 6. Explicabilis ratio eſt quæ explicabili numero explicari poteſt.

---

[1] Bij Definitiones: dikwijls Explicatio, niet zelden Nota(æ).

[2] Bij Problemata: Explicatio dati, Explicatio quæſiti, Conſtructio (soms met Diſtinctiones), soms Præparatio demonſtrationis, Demonſtratio (soms met Diſtinctiones), Concluſio en soms Nota(æ).

[3] Houtsneden, tusschen den tekst.

Ratio eſt aut
- Æqualis
- Inæqualis
  - Maioris inæqualitatis
    - Simplex
      - Superparticularis
      - Superpartiens
    - Compoſita
      - Quæ per integros numeros tantum explicatur vt multiplex.
      - Quæ per integros & fractos numeros explicatur vt
        - Multiplex ſuperparticularis
        - Multiplex ſuperpartiens
  - Minoris inæqualitatis
    - Simplex
      - Subſuperparticularis
      - Subſuperpartiens
    - Compoſita
      - Quæ per integros numeros tantũ explicatur, vt ſubmultiplex.
      - Quæ per integros & fractos numeros explicatur vt
        - Submultiplex ſuperparticularis
        - Submultiplex ſuperpartiens.

Definitio 7. Inexplicabilis ratio eſt, quæ explicabili numero explicari non poteſt.

Definitio 8. Transformata ratio eſt, in qua per reſumptionem fit termini vel terminorum transfiguratio.

Definitio 9. Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis termini ad antecedentem.

Definitio 10. Perturbata ratio eſt, comparatio ſecundi termini ad tertium, & primi ad ſecundum: ſi verò plurium terminorum fuerit ratio, tum ſecundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ſic deinceps quamdiu ratio extiterit: tandemque primi ad ſecundum.

Definitio 11. Perturbata ratio in tribus terminis paucisſimis conſiſtit.

Definitio 12. Proportio magnitudinum eſt duarum æqualium rationum ſimilitudo.

Definitio 13. Binaria proportio eſt quæ ex duabus æqualibus binarijs rationibus conſiſtit. Ternaria verò proportio quæ ex duabus æqualibus ternarijs rationibus conſiſtit, & ſic pari ordine ſecundum ſpecies rationum vocabitur proportio.

Definitio 14. Continua proportio eſt, cum quiſque intermedius terminus vice antecedentis & conſequentis ſumitur.

Definitio 15. Continua proportio in tribus terminis paucifsimis confiftit.

Definitio 16. Difcontinua proportio eft cum quifque intermedius terminus vice antecedentis & confequentis fumi non poteft.

Definitio 17. Difcontinua proportio in quatuor terminis paucifsimis confiftit.

Definitio 18. Proportionis Homologi termini dicuntur, primus primæ rationis, cùm primo fecundæ rationis. Similiter dicuntur Homologi termini fecundus primæ rationis, cum fecundo fecundæ rationis, & fic pari ordine in reliquis fecundum multitudinem terminorum.

Definitio 19. Transformata proportio eft quæ ex duabus æqualibus transformatis rationibus confiftit.

Definitio 20. Inverfa proportio eft quæ ex duabus æqualibus inverfis rationibus confiftit.

Definitio 21. Alterna proportio eft fimilis fumptio homologorum terminorum ad homologos terminos.

Definitio 22. Perturbata proportio eft fimilitudo duarum æqualium rationum quarum altera eft perturbata.

Definitio 23. Perturbata proportio in fex terminis paucifsimis confiftit.

Definitio 24. Cum tres termini proportionales fuerint: Primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad fecundum. At cum quatuor termini continuè proportionales fuerint, primus ad quartum triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad fecundum: Et femper deinceps vno amplius quamdiu proportio extiterit.

Problema I. Datis rectilinei triangulis: Rectas lineas invenire inter fe in ea ratione ac ordine vt funt trianguli.

Problema II. A quouis angulo trianguli rectam lineam ducere, quæ diuidat triangulum verfus partem petitam fecundum rationem datam.

Problema III. A dato puncto in latere trianguli, rectam lineam ducere quæ diuidat triangulum verfus partem petitam fecundum rationem datam.

Sequentia quinque Problemata funt ea quæ ante hac nunquam defcripta putamus.

Problema IIII. A quovis angulo quadranguli, rectam lineam ducere, quæ diuidat quadrangulum verfus partem petitam fecundum rationem datam.

Problema V. A dato puncto in latere cuiufcunque rectilinei,

rectam lineam ducere quæ diuidat rectilineum verſus partem petitam ſecundum rationem datam.

PROBLEMA VI. In dato triangulo rectam lineam ducere parallelam cum latere trianguli quæſito, quæ triangulum diuidat verſus partem quæſitam ſecundum rationem datam.

PROBLEMA VII In dato trapezio [1]) rectam lineam ducere parallelam cum latere trapezij quæſito quæ trapezium diuidat verſus partem quæſitam ſecundum rationem datam.

Modus primus. Vbi linea diuidens trapezium cadit in duo latera eundem angulum continentia.

Modus ſecundus. Vbi linea diuidens trapezium cadit in duo latera trapezij oppoſita.

PROBLEMA VIII. In dato quocunque rectilineo rectam lineam ducere parallelam cùm latere rectilinei quæſito, quæ rectilineum diuidat verſus partem quæſitam ſecundum rationem datam.

LIBER SECVNDVS.

1 Problema; 4 figuren.

Quid ſit regula Falſi. Qvoniam geometriam (quam breuiter ſperamus nos edituros) in Methodum Arithmeticæ methodo ſimilem digeſſimus (quod naturalis ordo videtur requirere propter magnam convenientiam continuæ & diſcontinuæ quantitatis vbi quodcunque genus magnitudinis, vt ſunt linea, ſuperficies, corpus, per quatuor ſpecies, vt Additionem, Subtractionem, Multiplicationem & Diuiſi onem, præterea per regulas, vt proportionum &c. tractabimus) offerebat ſe quoque ex ordine Problema quoddam, vbi per falſam poſitionem veram ſolutionem petitam Geometricè inveniremus: Quare vt continuæ & diſcontinuæ quantitatum correſpondentiam tantò manifeſtius redderemus (nam vulgaris quædam regula in Arithmetica habetur quæ regula Falſi dicitur) Regulam Falſi continuæ quantitatis nominauimus, non quod falſum docet, ſed quia per falſam poſitionem pervenitur ad cognitionem veri.

Vtilitas huius regulæ inter alia hæc eſt, Quod eam quaſi quoddam generale Problema citare poſſimus, quoties alicuius occultæ magni-

[1]) Evenals Euclides vat Stevin onder den naam „trapezium" alle vierhoeken samen, die geen parallelogrammen zijn. In zijn tegenwoordige beteekenis kwam de term pas omstreeks het midden van de 18e eeuw algemeen in gebruik. (Chasles, Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie, 2ième Edition, Parijs 1875, p. 422 Noot.)

tudinis quantitatem & formam operæpretium erit invenire, id enim inbebitur tantum per regulam Falſi expediri. Itaque ſæpe non opus erit in Problematum constructionibus quarundam occultarum magnitudinum inventionem copioſius deſcribere.

Problema. Ex datæ lineæ explicata tantum qualitate, ſuperficiem deſcribere æqualem & ſimilem ſuperficiei in qua ipſa linea exiſtit.

Exemplum primum. Sit data recta A, linea cuiuſdam occulti æquilateri trianguli, talis vt ſi linea æqualis perpendiculari ab angulo in medium oppoſiti lateris ſecetur à latere, & reliquo addatur recta æqualis rectæ à centro trianguli in medium lateris. Summa Additionis ſit ipſa A.

Oporteat ex huiuſmodi lineæ A explicata qualitate, æquilaterum triangulum deſcribere, æqualem æquilatero occulto in quo exiſtit A.

Exemplum ſecundum. Sit data recta A, linea cuiuſdam occulti quadrati talis, vt ſi linea æqualis lateri ipſius quadrati ſecetur à diagonali, reliquum ſit ipſa A.

Oporteat ex huiuſmodi lineæ A explicata qualitate, quadratum deſcribere, æquale quadrato occulto in quo A exiſtit.

Exemplum tertium. Sit data recta A linea perpendicularis cuiuſdam occulti pentagoni æquilateri & æquianguli, ab angulo in medium ipſius oppoſiti lateris.

Oporteat ex eiuſmodi lineæ A explicata qualitate pentagonum deſcribere, æquale eſt ſimile pentagono occulto in quo A exiſtit.

Exemplum quartum. Sit data recta A, linea cuiuſdam occulti rectilinij ſimilis rectilineo BCDEF, ita vt linea æqualis occulti rectilinei homologæ lineæ cum BC, ſecta ab occulti rectilinei homologa linea cum FC, & reliquo addita oculti rectilinei homologa linea cum FE, ſit in directum vnius lineæ ipſa data linea A.

Oporteat ex huiuſmodi lineæ A explicata qualitate rectilineum deſcribere, æquale & ſimile ſimiliter'que poſitum rectilineo occulto in quo A existit.

Liber Tertivs.

22 Definitiones; 2 Problemata; 21 figuren.

Præter quinque corpora regularia quorum Mathematici meminerunt, animaduertimus alia quædam corpora quæ quamvis talem non haberent regularitatem vt in quinque illis regularibus requiritur (nam demonſtratur quinque tantum talia corpora poſſe inveniri) nihilominus Geometricarum ſpeculationum eſſent plena, ac mirabilis diſpoſitionis correlatiuarum ſuperficierum. Horum autem corporum

ſex meminit Albertus Durerus, in ſua Geometria (ſunt quidem in eadem Alberti deſcriptione & alia duo corpora quæ ex complicatis planis componuntur quorum alterum non poteſt plicari, ratio eſt quia ad vnum angulum ſolidum conſtruendum compoſiti ſunt tres anguli plani æquales quatuor rectis, qui angulum ſolidum per 21. prop. lib. 11. Euclid. non conſtituunt. Alterum verò corpus non continetur intra metas quæ in ſequenti 11. definit. ſunt poſitæ, quare illa duo corpora reliquimus) ſed cum talium corporum originem vel nomina apud neminem inveniremus tamen exiſtimaremus non ſine aliquo certo fundamento conſiſtere, vidimus tandem regularia corpora ipſorum eſſe ſcatebram, nam illorum vnum, erat tetraedrum truncatum, altera tria, truncati cubi, & quintum, truncatum octaedrum: Sexti verò corporis truncatio hæc ſcribentibus nobis erat ignota, quamvis ex truncato cubo originem habere non dubitamus. Cum'que hæc nobis eſſent nota invenimus (nam tale quid ſæpe fit cum rerum cauſas cognoſcimus) alia tria corpora non minoris elegantiæ nempe ex truncatis Dodecaedro & Icoſaedro. Quorum definitiones ſunt ſequentes defi. 20. 21. 22. Et ipſorum planorum diſpoſitiones in ſequenti ſecundo Problemate diſtinct. 17. 18. 19. invenientur. Si forte ab alio ante nos ſunt inventa (de quo ferè non dubitarem propter magnam diligentiam veterum in formarum inquiſitione) fatemur hoc nos ignorare. Quare vt pro noſtro invento talia edimus.

Postea verò factum eſt (recitamus hæc quia aliquando non iniucundum eſt inventionum occaſiones non ignorare) vt Franciſcus Cophart Archimuſicus nostri Leidenſis Muſicorum collegij, & Geometriæ ſingularis amator, vellet mihi perſuadere ſe caſu quodam ſextum corpus regulare vidiſſe, cuius conſtructio talis erat:

Ducantur omnes Diagonales lineæ omnium quadratorum cubi, ducantur deinde plana ab omnibus angulis ſolidis cubi per duas diagonales lineas vſque ad ipſarum diagonalium medietates, exſcindantur'què hoc modo omnia ſuperficierum cubi latera, cum ſubiecta ſolida parte ipſius cubi inter duo ſecantia plana comprehenſa. Erunt itaque cubo (quoniam duodecim habet latera) duodecim crenæ inſciſæ: relinquetur'que elegans corpus in viginti & quatuor æqualibus triangulis æquilateris contentum. Quare ille argumentabatur hoc modo:

Corpora ſphæræ inſcriptibilia quorum ſuperficies ſunt omnes æquales & ſimiles, ſunt corpora regularia:

Corpus hoc eſt corpus ſphæræ inſcriptibile, cuius ſuperficies ſunt omnes æquales & ſimiles:

Ergo est corpus regulare, & per conſequens ſextum.

Sed negabamus partem antecedentem aſsumptionis, quoniam tale corpus non est corpus ſphæræ ita inſcriptibile, vt in regularium corporum inſcribilitate requiritur, nam ſenſus ibi eſt omnes angulos ſolidos corporum debere existere in ſuperficie ſphæræ circumſcriptæ, huius verò corporis duæ ſunt ſpecies ſolidorum angulorum, nam alterius ſpeciei anguli ſunt externi, alterius interni. Verum quidem eſt omnes angulos externos eidem ſphæræ eſse inſcriptibiles: Similiter & omnes angulos internos eidem ſphæræ inſcriptibiles: Sed non omnes eidem, nam alia eſt ſphæra externorum angulorum alia internorum. Igitur quia hoc corpus non habebat omnes proprietates quæ in regularibus corporibus requiruntur, concludebamus illud non eſse ſextum corpus regulare. Postea verò vidimus tale corpus eſse octoedrum cui appoſita erant octo tetraedra, quorum baſes erant octoedri octo ſuperficies. Cum'que hoc animaduerteremus vnà cùm elegantia ipſius, atque Geometricis rationibus in eo conſistentibus, adplicauimus talem conſtructionem ad cetera quatuor regularia corpora, quæ omnia regularia aucta vocauimus, quorum conſtructio & eidem ſphæræ inſcriptio vnà cum ceteris, est materia de qua nunc agetur.

Definitiones quinque corporum regularium.

Definitio 1. Tetraedrum eſt corpus ſub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contentum.

Definitio 2. Cubus eſt corpus ſub ſex quadratis æqualibus contentum.

Definitio 3. Octoedrum eſt corpus ſub octo triangulis æqualibus & æquilateris contentum.

Definitio 4. Dodecaedrum eſt corpus ſub duodecim pentagonis æqualibus & æquilateris & æquiangulis contentum.

Definitio 5. Icoſaedrum eſt corpus ſub viginti triangulis æqualibus & æquilateris contentum.

Definitiones quinque auctorum corporum regularium.

Definitio 6. Si cuicunque ſuperficiei tetraedri apponatur tetraedrum habens ſuperficiem illam pro baſi: Corpus ex illis compoſitum duodecim triangulis æqualibus & æquilateris contentum vocatur tetraedrum auctum.

Definitio 7. Si cuicunque ſuperficiei hexaedri apponatur pyramis habens ſuperficiem illam pro baſi, & reliquas ſuperficies triangula æquilatera: Corpus ex illis compoſitum vigintiquatuor triangulis æqualibus & æquilateris contentum, vocatur Hexaedrum auctum.

Definitio 8. Si cuicunque ſuperficiei octoedri apponatur tetraedrum habens ſuperficiem illam pro baſi: Corpus ex illis compoſitum viginti & quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contentum, vocatur octoedrum auctum.

Definitio 9. Si cuicunque ſuperficiei dodecaedri apponatur pyramis habens ſuperficiem illam pro baſi, & reliquas ſuperficies triangula æquilatera: Corpus ex illis compoſitum ſexaginta triangulis æqualibus & æquilateris contentum, vocatur dodecaedrum auctum.

Definitio 10. Si cuicunque ſuperficiei icoſaedri apponatur tetraedrum habens ſuperficiem ipſam pro baſi: Corpus ex illis compositum ſexaginta triangulis æqualibus & æquilateris contentum, vocatur icoſaedrum auctum.

Definitiones nouem truncatorum corporum regularium.

Definitio 11. Solidum ſphæræ inſcriptibile cuius anguli ſolidi ſunt omnes æquales, & cuius plana non ſunt omnia ſimilia, & quodcunque planum eſt æquiangulum & æquilaterum, & omnium planorum latera ſunt inter ſe æqualia: vocatur truncatum corpus regulare.

Definitio 12. Si omnia latera tetraedri diuidãtur in tres partes æquas, & plano ſingulus angulus ſolidus tetraedri abſcindatur, per trium laterum diuiſiones ipſi angulo proximas; Reliquum ſolidum vocatur truncatum tetraedrum per laterum tertias.

Definitio 13. Si omnia latera cubi diuidantur in duas partes æquas, & plano ſinguli anguli ſolidi cubi abſcindantur, per trium laterum diuiſiones ipſi angulo proximas: Reliquum ſolidum vocatur Truncatus Cubus per laterum media.

Nota. Hoc corpus ſimile eſt truncato octoedro per laterum media ſequentis 17. Definitionis.

Definitio 14. Si omnia latera cubi diuidantur in tres partes, hoc modo vt ſingulæ mediæ partes ſe habeãt ad vtramque alteram partem ipſius lateris vt diagonalis quadrati ad ſuum latus, & plano ſinguli anguli ſolidi ipſius cubi abſcindantur per trium laterum diuiſiones ipſi angulo proximas: Reliquum ſolidum vocatur truncatus cubus per laterum diuiſiones in tres partes.

Definitio 15. Si omnia latera cubi diuidantur in tres partes, hoc modo vt ſingulæ mediæ partes se habeãt ad vtramque alteram partem ipſius lateris, vt diagonalis quadrati ad ſuum latus, & plano ſingula latera abſcindãtur per quatuor laterum diuiſiones in ipſis abſcindendis lateribus, non exiſtentibus & ipſis lateribus proximas,

relinquetur corpus habens ſex quadrata, & octo angulos ſolidos in æquidiſtantia à centro cubi, & ab eodem centro remotiores quàm reliqui anguli ſolidi: Si deinde ſinguli anguli illorum octo, plano abſcindātur per tres proximos angulos planos trium quadratorum ipſis ſolidis angulis proximorum: Reliquum ſolidum vocatur biſtruncatus cubus primus.

Definitio 16. Si omnia latera cubi diuidantur in quinque partes, hoc modo vt mediæ partes ſe habeant ad quamcunque partem reliquarum quatuor partium ipſius lateris, vt diagonalis quadrati ad ſuum latus, & plano ſingula latera abſcindantur, per quatuor laterum diuiſiones in vnoquoque abſcindendo latere non exiſtentes, & ipſi lateri proximas, relinquatur'que hoc modo corpus habens ſex quadrata & octo angulos ſolidos in æquidiſtantia à centro, & ab eodē centro remotiores quàm reliqui anguli ſolidi: Si deinde omnia latera illorum ſex quadratorum diuidantur in tres partes, hoc modo vt ſingulæ mediæ partes ſe habeant ad vtramque alteram partem ipſius lateris, vt diagonalis quadrati ad ſuum latus, & plano ſinguli anguli ſolidi illorum octo angulorum abſcindantur, per ſex diuiſiones illorum laterum quadratorum ipſis angulis ſolidis proximas: Reliquum ſolidum vocatur biſtruncatus cubus ſecundus.

Definitio 17. Si omnia latera octoedri diuidantur in duas partes æquas, & plano ſinguli anguli ſolidi octoedri abſcindantur per quatuor laterum diuiſiones ipſis angulis proximas: Reliquum ſolidum vocatur truncatum octoedrum per laterum media.

Nota. Hoc corpus ſimile eſt truncato cubo per laterum media 13. definitionis.

Definitio 18. Si omnia latera octoedri diuidantur in tres partes æquas, & plano ſinguli anguli ſolidi octoedri abſcindantur, per quatuor laterum diuiſiones ipſis angulis proximas: Reliquum ſolidum vocatur octoedrum truncatum per laterum tertias.

Definitio 19. Si omnia latera dodecaedri diuidantur in duas partes æquas, & plano ſinguli anguli ſolidi abſcindantur per trium laterum diuiſiones ipſis angulis proximas: Reliquum ſolidum vocatur truncatum dodecaedrum per laterum media.

Nota. Hoc corpus ſimile eſt truncato Icoſaedro per laterum media ſequentis 21. definitionis.

Definitio 20. Si omnia latera dodecaedri diuidantur in tres partes, hoc modo vt ſingulæ mediæ partes ad vtramque alteram partem ipſius lateris ſe habeant vt chorda arcus duarum quintarum peripheriæ circuli ad chordam arcus vnius quintæ eiuſdem peripheriæ & plano ſinguli anguli ſolidi dodecaedri abſcindantur per trium

laterum diuisiones ipsis angulis proximas: Reliquum solidum vocatur truncatum dodecaedrum per laterum diuisiones in tres partes.

Definitio 21. Si omnia latera Icosaedri diuidantur in duas partes æquas, & plano singuli anguli solidi icosaedri abscindantur per quinque laterum diuisiones ipsis angulis proximas: Reliquum solidum vocatur truncatum icosaedrum per laterum media.

Nota. Hoc corpus simile est truncato dodecaedro per laterum media præcedentis 19. definitionis.

Definitio 22. Si omnia latera icosaedri diuidantur in tres partes æquas, & plano singuli anguli solidi icosaedri abscindantur per quinque laterum diuisiones ipsis angulis proximas: Reliquum solidum vocatur icosaedrum truncatum per laterum tertias.

Problema I. Dato maximo circulo sphæræ: latera quinque regularium corporum, quinque auctorum corporum, & nouem truncatorum corporum regularium, ipsi sphæræ inscriptibilium, invenire.

Problema II. Datis lateribus quinque corporum regularium, & quinque auctorum regularium corporum, & nouem truncatorũ regularium corporum, eidem sphæræ inscriptibilium, plana construere ac disponere, quæ si ritè complicentur efficiant ipsa corpora.

Appendix. Planorum verò dispositio corporis truncati (cuius est facta mentio in principio huius 3. lib.) cuius truncandi modus hæc scribentem me latebat talis est: Disponantur, vt infra [Fig. 17], sex quadrata & 32. trianguli.

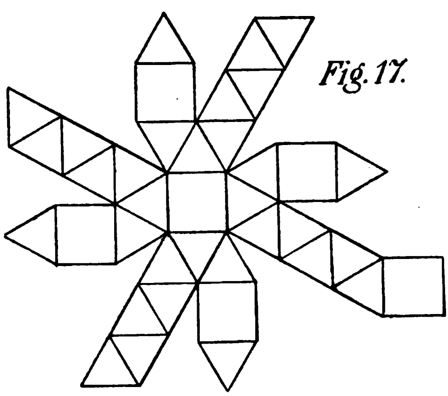


Fig. 17.

Sed propter ipsius truncationis, seu veræ originis ignorantiam non potuimus hoc Geometricè antedictæ sphæræ inscriptibile cum ceteris construere.

Liber Qvartvs.

4 Problemata; 1 Theorema [1]); 9 figuren.

Problema I. Datis duabus rectis lineis duas medias proportionales invenire.

Nota. Etſi hoc Problema (quamvis non Geometricè) per diuerſa inſtrumenta multifariam à veteribus ſit inventum, dabitur tamen hic tantum vnicum exemplum per lineas, ſecundum modum Heronis. Reliquos modos qui per inſtrumenta expediuntur, in nostra Geometria ſuis inſtrumentis accommodatis breuiter ſperamus nos edituros.

Problema II. Dato cono æqualem conum ſub data altitudine deſcribere.

Problema III. Dato chordæ ſegmento ſphærali, æqualem conum deſcribere, habentum baſin cum chordæ ſegmento eandem.

Problema IIII. ac quæſitum huius Quarti libri: Datis quibuſcunque duobus corporibus Geometricis, tertium corpus deſcribere, alteri datorum ſimile, alteri vero æquale.

Exemplum primum. Sint duo corpora quæcunque, nempe duo coni ABC, & DEF, ſit'que coni DEF altitudo, recta DG, & baſis diameter EF.

Oporteat tertium conum conſtruere, cono DEF ſimilem & cono ABC æqualem.

Exemplum ſecundum. Antedicta conorum conſtructio ac demonſtratio applicari poteſt ad ſubſcriptos cylindros: —

Exemplum tertium. Sint duo chordæ ſegmenta ſphæralia ABCD, & EFGH, ſit'que chordæ ſegmenti EFGH, altitudo HF, & baſis diameter EG.

Oporteat tertium chordæ ſegmentum ſphærale conſtruere, ſegmento EFGH ſimile, & ſegmento ABCD æquale.

[*Exemplum quartum.*] Sit pyramis ABC, cuius baſis ſit quadratum, & latus BC eiuſdem quadrati 2 pedum, altitudo vero pyramidis AD ſit 12 pedum, quare ipſius pyramidis magnitudo 16 pedum: Sit deinde pyramis EFG, cuius baſis ſit quadratum, & latus FG eiuſdem quadrati 8 pedum, altitudo vero ipſius pyramidis EH 3 pedum.

Oporteat per numeros eo ordine, vt ſupra per lineas factum eſt, tertiam pyramidem deſcribere, pyramidi EFG ſimilem & pyramidi, ABC æqualem.

---

[1]) Bij Theoremata: soms Explicatio datis, Demonſtratio en Concluſio.

Theorema. Si fuerit diametrorum basium tertia linea proportionalis, duorum rectorum conorum æqualis altitudinis, fuerit'que prima linea media proportionalis, duarum mediarum proportionalium, inter primam diametrum & tertiam, fuerit'que quædam recta linea in ea ratione ad illam primam mediam, vt primi coni altitudo ad suam diametrum basis: Conus rectus cuius diameter basis fuerit illa prima media, altitudo vero illa recta linea, similis erit primo cono, æqualis vero alteri cono.

Liber Qvintvs.

3 Problemata; 3 Theoremata; 12 figuren.

Problema I. Datis duobus planis similibus: tertium planum describere datis duobus æquale & alteri datorum simile.

Theorema. Si tertia linea proportionalis duarum homologarum linearum existentium in similibus planis, addatur primæ lineæ: Media linea proportionalis inter primam & illam compositam, est potentialiter homologa linea, cum illis homologis lineis, cuiusdam plani quod simile est alteri datorum, & æquale ambobus.

Problema II. Datis quibuscunque duorum similium Geometricorum corporum homologis lineis, tertium corpus construere datis duobus æquale, & alteri datorum simile.

Theorema. Si quarta linea proportionalis duarum homologarum linearum existentium in similibus corporibus, addatur primæ lineæ: Antecedens linea duarum mediarum proportionalium inter primam & illam compositam, est potentialiter homologa linea cum illis homologis lineis, cuiusdam corporis quod simile est alteri datorum, & æquale ambobus.

Problema III. Datis quibuscunque duorum similium & inæqualium Geometricorum corporum homologis lineis, tertium corpus construere, tanto minus dato maiore, quantum est datum minus, & alteri datorum simile.

Theorema. Si à quarta linea proportionali duarum homologarum linearum existentium in similibus inæqualibus corporibus, auferatur minor homologarum: Antecedens linea duarum mediarum proportionalium, inter minorem homologam lineam, & illius lineæ reliquum, est potentialiter homologa linea cum illis homologis, cuiusdam corporis quod simile est alteri datorum corporum, & tanto minus dato maiore, quantum est datum minus.

SUR LA TRANSFORMATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE,

PAR

W. KAPTEYN.
(Utrecht.)

Dans cette note je me propose de démontrer l'identité suivante

$$\int_0^\mu \frac{\phi \sin \phi d\phi}{\sqrt{\cos^2\phi - \cos^2\mu \sin^2 b}} = \int_0^\mu \operatorname{tg}\phi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg}\phi}{\cos b} d\phi$$

de deux intégrales définies de forme bien différente.

Pour y parvenir je me servirai de la formule

$$\int_a^b d\rho \int_\rho^b z ds = \int_a^b ds \int_a^s z d\rho$$

de Lejeune-Dirichlet, dont les deux membres expriment le même volume compris entre la surface $z = f(\rho, s)$, $f(\rho, s)$ désignant une fonction quelconque qui reste finie entre les limites des intégrations, et les quatre plans $z = 0$, $s = \rho$, $\rho = a$, $s = b$.

En choisissant

$$z = \frac{\rho}{s\sqrt{s^2 - \rho^2}\sqrt{\rho^2 - \cos^2\mu \sin^2 b}}, \; a = \cos\mu, \; b = 1$$

cette formule donne

$$\int_{\cos\mu}^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \cos^2\mu \sin^2 b}} \int_\rho^1 \frac{ds}{s\sqrt{s^2 - \rho^2}} =$$

$$\int_{\cos\mu}^1 \frac{ds}{s} \int_{\cos\mu}^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{s^2 - \rho^2}\sqrt{\rho^2 - \cos^2\mu \sin^2 b}}.$$

Or, on a

$$\int_{\rho}^{1} \frac{ds}{s\sqrt{s^2-\rho^2}} = \frac{1}{\rho} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}$$

$$\int_{\cos\mu}^{s} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{s^2-\rho^2}\ \sqrt{\rho^2-\cos^2\mu\sin^2 b}} =$$

$$= - \left| \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s^2-\rho^2}}{\sqrt{\rho^2-\cos^2\mu\sin^2 b}} \right|_{\cos\mu}^{s} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s^2-\cos^2\mu}}{\cos\mu\cos b}$$

par suite

$$\int_{\cos\mu}^{1} \frac{1}{\sqrt{\rho^2-\cos^2\mu\sin^2 b}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\, d\rho =$$

$$= \int_{\cos\mu}^{1} \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s^2-\cos^2\mu}}{\cos\mu\cos b}\, ds$$

ou, en posant $\rho = \cos\phi$ et $s = \dfrac{\cos\mu}{\cos\phi}$

$$\int_{0}^{\mu} \frac{\phi\sin\phi\, d\phi}{\sqrt{\cos^2\phi - \cos^2\mu\sin^2 b}} = \int_{0}^{\mu} \operatorname{tg}\phi \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\phi}{\cos b}\, d\phi.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Le traité des sinus de Michiel Coignet publié par Henri Bosmans de la Compagnie de Jésus. Bruxelles, Polleunis et Ceuterick, 1901, 8°.

[pp. 1—11, Introduction. pp. 12—31, Notes de l'introduction. pp. 32—55, Texte de Coignet. pp. 56—80, Notes du texte.]

In zijn Ideae mathematicae pars prima, 1593, roemt Adriaan van Roomen zijn tijdgenoot Michiel Coignet van Antwerpen als een bekwaam wis- en werktuigkundige en gewaagt o.a. met lof van diens onuitgegeven geschriften over reken-, meet- en sterrenkunde.

Eenige dier handschriften, die wegens de ongunst der tijden nimmer in druk zijn verschenen, bezit de Koninklijke Bibliotheek te Brussel, t.w. een verhandeling over de samenstelling van goniometrische tafels, een over vlakke-driehoeksmeting en een over het gebruik van een verdeelde liniaal, pantometer genoemd, bij de oplossing van meetkundige vraagstukken.

Door de uitgaaf van de verhandeling over de samenstelling van goniometrische tafels — Le Traicté des Sinus — hoopt P. Bosmans de herinnering aan zijn landgenoot te verlevendigen en een geleerde, op wien België met recht trotsch mag wezen, voor vergetelheid te bewaren. In de belangrijke historische inleiding, die het Traicté des Sinus voorafgaat, vindt men o. a. een overzicht van den inhoud van de verhandelingen over vlakke-driehoeksmeting en over den pantometer, terwijl aan Inleiding en Traicté talrijke aanteekeningen zijn toegevoegd.

Hoewel dankbaar voor wat P. Bosmans den liefhebbers van de historie der wiskunde hier aanbiedt, kan ik bezwaarlijk instemmen met den lof door hem aan C.'s geschrift toegezwaaid, want diens verhandeling, den 19en October 1612 voltooid,

blijkt reeds bij een oppervlakkige vergelijking grootendeels bewerkt te zijn naar Pitiscus' Trigonometria, met name naar het tweede en het vijfde boek der Augsburger uitgaaf van 1600.

De gang der berekening van de sinussen, tangenten en secanten der bogen bij C. stemt geheel overeen met dien bij P. en de bekortingen, door dezen toegepast, vindt men bij genen terug. Zoo beantwoorden: C.'s „Practiq; pour examiner si les tables de sinus sont bien calculees" (pp. 47—50) aan P.'s „Compendivm Canonis condendi primum" (pp. 111—113); — C.'s „reigles compendieuses pour le faict des Tables des Tangentes, et Secantes" en diens „Reigle pour former la table des secantes par laijde des Tangentes" (pp. 51—53) met twee van diens voorbeelden aan P.'s „C. C. c. secundum" en „tertium" (pp. 113—119); — C.'s „Abreuiations sur la reigle de trois aux tables de Sinus" (pp. 53—55) met twee van diens voorbeelden aan P.'s „C. C. ufurpandi primum" en „secundum" (pp. 119—122): C.'s derde voorbeeld, aan de sferische astronomie ontleend, komt, met andere gegevens, bij P. op p. 285 voor. Bij dezen ontbreken evenwel het 2e, 7e en 8e problema van C., die „ne sont pas en grand vsaige aupres des Canonistes qui vueillent calculer les Tables de sinus, pour estre fort longues a practicquer" (p. 43), alsmede de noot op pp. 45—47. (P. behandelt den inhoud dier noot „ex mente Byrgii" in den 2en en 3en druk van zijn leerboek, waaraan C.'s opmerkingen echter niet ontleend zijn.)

Op één zaak, die P. Bosmans niet onbekend geweest is (p. 72, noot 1) en hem den weg naar C.'s voornaamste bron had kunnen wijzen, moet ik nog de aandacht vestigen, t. w. op de overeenstemming in den vorm, waarin C. en P. de formules voor $\sin(a \pm b)$ uitdrukken.

Bij C. leest men (p. 40):

„Le 5e. Probleme. Quand les sinus de deux diuers arcs sont donnez comment on trouuera le sinus de leur somme . . . .

La Reigle. Multipliez le sinus du premier arc, auecq le sinus du complement du 2e. arc, et aussij multiplierez le sinus du 2e. arc, auecq; le complement du premier arc (sic), la somme de ces deux produict partirez par le sinus total, et le quotient sera le sinus qu'on cherchoit,"

en bij P. (pp. 46 en 47):

„Datis finibus duorum arcuum inæqualium coniunctim qua-

drante minorum, unà cum finibus complementorum, finum fummæ duorum illorum arcuum inuenire . . . . .

Primùm multiplicentur alternatim finus arcus unius per finũ complementi alterius. Tum producta componantur. Deniq; fumma per radium diuidatur, hoc eft, notæ quinq; à dextris abfcindantur. Notæ reliquæ erunt finus fummæ datorum duorum arcuum." Enz.

Ook de bewijzen bij C. en P. stemmen geheel overeen: beiden leiden de stellingen uit het theorema van Ptolemeus af.

„Il est impossible", zegt P. Bosmans in een „Notice historique sur les formules sin $(a \pm b)$" (pp. 62—73), waarin Rhaeticus' Opus Palatinum de triangulis, 1596 — „un écrivain prolixe, obscur et souvent difficile" (p. 72) — als C.'s bron wordt aangewezen, „il est impossible d'être quelque peu familier avec les anciens traités de trigonométrie, sans être frappé de la netteté et de la précision, que la formule $\sin(a \pm b) = (\sin a \cos b \pm \sin b \cos a) / R$ prend sous la plume de Coignet et de la forme, presque moderne, dirais je, sous laquelle elle y est énoncée . . . . Coignet déduit les formules sin $(a \pm b)$ des théorèmes de Ptolémée d'une manière si simple, si naturelle, qu'en lisant sa démonstration on est porté à se dire que ces formules ne sont que ces théorèmes eux-mêmes, énoncés en d'autres termes (p. 62) . . . . S'il y a du mérite à découvrir la vérité, il y en a aussi à la mettre en pleine lumière. Il faut reconnaître, que ce dernier mérite, Coignet l'a eu au plus haut degré. Il a profondément étudié Rheticus . . . . (p. 72)."

Niet aan Michiel Coignet evenwel, den wis- en werktuigkundige der aartshertogen Albertus en Isabella, komt deze lofspraak toe, maar aan den hofprediker van Frederik IV, keurvorst van de Palts, Bartholomeus Pitiscus, „le correcteur et le continuateur de Rheticus" (p. 72, noot 1).

N. L. W. A. Gravelaar.

Grondslagen der synthetische meetkunde door Dr. P. van Geer, Hoogleeraar aan de Rijks-Universiteit te Leiden. Een deel in 8°, 186 blz. Prijs *f* 2.90. Leiden, A. W. Sythoff, 1901.

Spoediger dan men redelijkerwijze kon verwachten heeft de hooggeleerde schrijver het in zijn „Leerboek der analytische meetkunde" kenbaar gemaakte voornemen dit door een beknopt

werk over de grondslagen der synthetische meetkunde te laten volgen ten uitvoer gelegd.

In dit nieuwe werkje, dat er bovenal naar streeft eenvoudig te blijven, staat de dubbelverhouding in die mate op den voorgrond, dat eerst ver in de tweede helft het eigenlijke onderwerp „de projectieve voortbrenging der kegelsneden" aan de orde komt.

De door den schrijver gevolgde gedachtengang is het best af te leiden uit de opsomming van de titels der afdeelingen en der in deze voorkomende hoofdstukken. Ze zijn:

Eerste afdeeling (figuren van den eersten trap): 1. Bepalingen. 2. De dubbelverhouding. 3. Harmonische ligging. 4. Imaginaire elementen. 5. Homografie. 6. Dubbelelementen der homografie. 7. Involutie.

Tweede afdeeling (rechtlijnige fiiguren): 8. Volledige vierzijde en driehoek. 9. Vierhoek en zeshoek. 10. Perspectieve en projectieve figuren.

Derde afdeeling (de cirkel): 11. Een cirkel. 12. Twee cirkels. 13. Drie en meer cirkels.

Vierde afdeeling (elementaire theorie der kegelsneden): 14. Het ontstaan der kegelsneden. 15. De ellips. 16. De hyperbool. 17. De parabool.

Vijfde afbeelding (synthetische theorie der kegelsneden). 18. Bepalingen. 19. Ingeschreven vierhoek en omgeschreven vierzij. 20. Ingeschreven zeshoek en omgeschreven zeszij. 21. Peilverwantschap. 22. Middelpunt, middellijnen, assen. 23. Brandpunten en richtpunten.

Zesde afdeeling (verwante kegelsneden). 24. Wederkeerige poolfiguren. 25. Kegelsnedebundel en kegelsnedeschaar.

Aanhangsel. 1. De isotrope richtingen. 2. Analytische bepaling der brandpunten.

Vraagstukken en toepassingen.

Elemente des geometrisch-perspektivischen Zeichnens von Dr. ARTHUR VON OERTINGEN, Prof. ord. hon. an der Universität Leipzig, u.s.w. Een deel in 8°, 177 blz., 209 figuren in den tekst. Prijs 8 Mark, gebonden 9 Mark. Leipzig, Wilhelm Engelmann, 1901.

Aan de inleiding van dit met opzet tot eenvoudige onderwerpen beperkt gehouden leerboek des bekenden bewerkers

van verscheidene van Ostwald's „Klassiker der exakten Wissenschaften" ontleenen we het volgende:

„Het blijkt steeds meer en meer noodig te zijn, de elemen„ten der synthetische meetkunde in het perspectieve denken „en praktische teekenen in te voeren. Het kan niet dringend „genoeg worden aangeraden zich de grondslagen van deze we„tenschap, tenminste voor zoover ze hier opgenomen worden, „eigen te maken. Daartoe behooren de stellingen over dubbel„verhoudingen, projectieve stelsels, scheve projectie, voort„brenging der kegelsneden, dubbelelementen en de eenvoudigste „projectieve ruimtestelsels. Dit alles wordt hier vooraf behan„deld gedeeltelijk in den klassieken door Steiner en aan gege„venen vorm met gebruik van de in Steiner's beroemd werk „voorkomende figuren. Hij, die zich tot hoofdzaken bepalen „wil, kan alleen de met groote letter gedrukte tekst bestudee„ren; wordt ook dit nog te moeielijk geacht, dan kan men met „het tweede hoofdstuk *het perspectieve teekenen* beginnen. Het „tweede gedeelte de maatperspectief, waaraan beschouwingen „over harmonische elementen, pool en poollijn, cirkel en punt„stelsels voorafgaan, zal den beginner minder moeite kosten. „Ook hier is het noodzakelijkst met groote letters gedrukt. „De methode lijnen en vlakken door vlucht- en doorsnijdings„elementen te bepalen is hier niet gevolgd. Een minder ab„strakte voorstelling, met behulp van het terrein, zal den „lezer steeds doelmatiger voorkomen.

Uit deze aanhaling kan de aard van bovenstaand werkje voldoende blijken; naar het ons voorkomt, kan het zoowel den minder wiskundig ontwikkelden lezer als den wiskundige van dienst zijn. S^e.

Le operazioni distributive et le loro applicazioni all' analisi di Salvatore Pincherle, prof. ord. nella R. Univ. di Bologna, in collaborazione con Ugo Amaldi, dottore in math. Een deel in 8°, 490 blz. Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1901.

Zoo als bekend is, noemt men een bewerking A distributief, zoodra zij voldoet aan de vergelijking $A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$, waarin α en β willekeurige grootheden zijn. Over deze eigenschap bezittende bewerkingen en hun toepassingen op de analyse handelt het lijvige boekdeel der italiaansche wiskundigen.

We geven hier, opdat men zich eenigszins een denkbeeld van den inhoud van dit werk kunnen geven, de vertaling van de titels der hoofdstukken en der onderafdeelingen.

1. Het algemeene lineaire samenstel van n afmetingen. 2. Algemeene beschouwingen over bewerkingon (bewerkingen in het algemeen; distributieve bewerkingen). 3. Wortels en wortelruimten van een distributieve bewerking (eerste eigenschappen der wortels; eigenschappen der wortels van commutatieve bewerkingen). 4. Bouw van de invariante ruimten met een eindig aantal afmetingen. 5. Het samenstel der machtreeksen en de eenvoudigste dtstributieve bewerkingen (machtreeksen als elementen van een lineair samenstel; de eenvoudigste functioneele bewerkingen). 6. De elementen der functierekening (de machtreeksen van het symbool D; de afgeleiden eener bewerking; de geheele negatieve machten van het symbool D; de machtreeksen van het symbool D^{-1}). 7. Eerste toepassingen der functierekening (de met de differentiatie commutatieve bewerkingen; wortels van een lineairen vorm met van een gegeven bewerking afhandende getallen-coëfficiënten; de veeltermen van Appell; de bewerkingen, die een ruimte met een oneindig aantal afmetingen doen overgaan in een ruimte met een eindig aantal afmetingen; bepaling van functioneele bewerkingen door symbolische vergelijkingen). 8. De normaalbewerkingen (de bewerkingen U; de bewerkingen U in een uitgestrekter ruimte; normaalbewerkingen van hoogeren graad). 9. Toegevoegde bewerkingen. 10. De lineaire differentie-vormen (de ruimte der elementen van de differentierekening; de lineaire differentie-vormen; wortels der vormen, differentie-vergelijkingen; grondstelsels van wortels; ontbinding van vormen in factoren; vormen van de eerste en de tweede soort, herleidbaarheid; toegevoegde vorm, vermenigvuldigers; de lineaire differentievormen met getallencoëfficiënten; machtreeksen van het symbool θ). 11. De lineaire differentiaalvormen (algebra van de lineaire differentiaalvormen; de lineaire differentiaalvergelijkingen; rationaliteitsgebieden, herleidbaarheid, invarianten; toegevoegde vorm, vermenigvuldigers; omkeering van een lineairen differentiaalvorm met behulp van de reeks van D^{-1}). 12. Normale lineaire differentiaalvormen (grondvergelijking, groep van monodremie; normale bijzondere punten, bepalende vergelijking; vormen en vergelijkingen van

Fricke). 13. Transformatie der bewerkingen (algemeene beschouwingen; de transformeerende bewerkingen; transformeerende bewerkingen van vermenigvuldiging en differentiatie, transformatie van Laplace; bewerkingen, die met de transformatie van Laplace analoog zijn; de differentiatie met willekeurige index, de transformatie van Euler). 14. De lineairé substitutievormen (algemeene beschouwingen; de grenspunten; de eenvoudigste functies der substitutierekening; homogene lineaire substitutievergelijkingen, vergelijkingen met getallen coefficienten; vergelijkingen met willekeurige coefficienten; de omgekeerde bewerking; de wortelgrepen van een vorm; grondstelsels van wortels). 15. Uitbreiding van de eigenschap van den determinant van Wronsky. 16. Over de meetkunde der lineaire functieruimten (homogene coördinaten, ontaarde homografie van eerste en tweede klasse; vlakken en lineaire vlakkenruimten; krommen T; ∞^1 doorloopende groepen van bewerkingen). Noten (1. Bibliografie van de theorie der distributieve bewerkingen. 2. De functioneele vergelijking $f(x+y) = f(x) + (y)$. 3. De theorie der elementaire deelers. 4. De distributieve bewerkingen van meer functies en van een functie met meer veranderlijken. 5. De nietdistributieve bewerkingen). Alfabetische naamlijst. Sᵉ.

Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. I. Theil: Differential-Rechnung von Dr. Ludwig Kiepert, Geheimer Regierungsrath, Prof. der Math. an der technischen Hochschule zu Hannover. Neueste vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. Max Stegemann. Een deel in 8^0., 750 blz., 171 figuren in den tekst. Hannover, Helwingsche Verlagsbuchhandlung, 1901.

In de negende druk van dit uitstekende werk, dat zijn plaats in de wiskundige litteratuur reeds sedert langen tijd veroverd heeft, zijn verschillende veranderingen aangebracht. Zoo is de bepaling van den restterm der reeks van Taylor en de theorie der convergentie van reeksen geheel omgewerkt en zijn voor het eerst hoofdstukken gewijd aan het onderzoek der hyperbolische functies, aan de interpolatieformule van Lagrange, aan de benaderingsmethoden bij de numerieke oplossing van algebraïsche vergelijkingen opgenomen. Daardoor is de differentiaalrekening, die eerst slechts twee deelen met 16 hoofd-

stukken en 140 paragrafen bevatte, uitgedijd tot drie deelen met 21 hoofdstukken en 161 paragrafen; van deze drie deelen omvat het tweede die algebraïsche onderzoekingen, welke voor den toekomstigen technicus van belang zijn. Bovendien is nu een tafel voor het gebruik der hyperbolische functies als aanhangsel aan het werk toegevoegd. En aan het slot bevindt zich weer een „Tabelle der wichtigstes Formeles aus der Differential-Rechnung"; deze twee vel druks beslaande tabel is ter kennisneming gratis te verkrijgen. S^{e}.

Rapports présentés au Congrès International de Physique, réuni à Paris en 1900 sous les auspices de la Société française de Physique, rassemblés et publiés par CH.-ÉD. GUILLAUME et L. POINCARÉ, Sécrétaires généraux du Congres. Drie deelen in gr. 8^{0}, T. I (XV, 698 p), T. II (570 p.), T. III (619 p.). Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Oorspronkelijk stelden de ontwerpers van dit Congres zich slechts voor een discussie te doen plaats hebben, die zou kunnen leiden tot het vaststellen van internationale eenheden voor verschillende in de natuurkunde voorkomende grootheden; natuurlijk op den grondslag van het metriek stelsel, en verband houdende met de reeds in de Electrotechniek vastgestelde eenheden. De belangstelling in het Congres bleek evenwel zoo groot te zijn (binnen korten tijd meldden zich over de duizend deelnemers aan) dat men het plan uitbreidde en besloot, een bespreking voor te bereiden van alle belangrijke vragen van de tegenwoordige natuurkunde.

De voorbereiding bestond hierin dat men, na vaststelling van een aantal onderwerpen, aan de leden van de Société française de Physique, en aan natuurkundigen van alle landen die zich op een of ander gebied een naam verworven hadden, opdroeg over die onderwerpen een Rapport uit te brengen.

Het resultaat van den gezamenlijken arbeid ligt thans voor ons in den vorm van drie lijvige boekdeelen; een vierde deel, de discussies en enkele nagekomen rapporten bevattende, is in uitzicht gesteld. In de inleiding wijzen de uitgevers er op, hoe ten slotte een nog hooger doel de ontwerpers voorzweefde: men wilde een werk scheppen, dat zou weergeven den stand van de natuurkunde op het einde der negentiende eeuw — het geheel van denkbeelden en hypothesen, waardoor

men tegenwoordig de samenstelling der natuur en de wettei die haar beheerschen tracht te verklaren.

Het zou ondoenlijk zijn in het kader van deze aankondigin(een slechts eenigermate volledig overzicht van den inhoud de: rapporten te leveren. We zullen daarom trachten een indrul van het werk te geven door de bespreking van enkele bijzonder(punten.

Uit den aard der zaak is een groot deel van de rapportei (36 van de 79) door Franschen geschreven. Overigens is d(deelneming zeer internationaal geweest: buiten Frankrijk zijı nog 13 landen door een of meer schrijvers vertegenwoordigd Zelfs Japan ontbreekt niet in de rij, terwijl van de Europeesch(landen alleen Spanje, Portugal en enkele Balkan-Staten gemisi worden. Nederland is waardig vertegenwoordigd door de namer Du Bois, Van 't Hoff, Lorentz en Van der Waals. Alleen Duitschland en Engeland leverden een grooter aantal (7) schrij· vers, Rusland en Zweden-Noorwegen een gelijk aantal.

Het pleit zeker voor het hooge peil waarop de studie dei natuurwetenschappen in Frankrijk staat, dat ondanks het buiten verhouding groote getal Fransche medewerkers, slechts weinige hunner rapporten den lezer doen betreuren, dat ze niet door een of ander bekend geleerde buiten Frankrijk zijn geschreven.

Een opmerking waartoe de rapporten bijna zonder uitzondering aanleiding geven, betreft den vooruitgang in nauwkeurigheid en gevoeligheid der instrumenten. Een goed beeld hiervan geeft het rapport van Benoît, (I, 30—77) „Over de nauwkeurigheid in de lengtebepaling bij metrologie". Beginnende met de „toise du Pérou" in Frankrijk, waar tusschen de „toise à bouts" en de „toise à points" een verschil van $\pm$ $^1/_{10}$ mM. bestond, eindigt hij met het resultaat van de vergelijking der standaardmeters voor de landen der Meter-conventie, gevende voor de waarschijnlijke fout van een dier meters 0,04μ, terwijl de werkelijke fout misschien 0,1μ bedragen kan, of $^1/_{10000}$ mM. En merkwaardig: men is begonnen met een natuurlijke eenheid als grondslag, heeft daarna met verwerping van de oorspronkelijke definitie zich aan de toevallige lengte van den „mètre des Archives" gehouden — thans zou men er bijna toe kunnen overgaan, weer een natuurlijke eenheid aan te nemen. De vergelijking van lengten door de interferentieele methode heeft thans n.l. een zoo hoogen trap bereikt, dat de

lengte van den meter in golflengten (de roode Cadmiumlijn bijv.) met een onzekerheid van niet meer dan 1μ bepaald is, terwijl Benoît meent, dat deze nauwkeurigheid nog wel verhoogd kan worden. Het rapport van Macé de Lépinay over dit onderwerp (I, 103—130) kan beschouwd worden als een hoogst interessant geval van oplossing van onbepaalde vergelijkingen.

Een ander sprekend voorbeeld van nauwkeurigheid geeft het rapport van Eötvös (III, 371—393) over niveauvlakken en plaatselijke veranderingen van de zwaartekracht. Hier wordt een instrument beschreven, waarmede de schrijver de niveauvlakken bepaalde, zooals ze door de wanden van een kamer gewijzigd worden, en de wet van Newton verifieerde, wat betreft de onafhankelijkheid der gravitatiekracht van den aard der stof en van tusschengelegen massa's, het eerste tot op $^1/_{20.10^6}$, het laatste tot op $^1/_{100.10^6}$!

Van de bekende gevoeligheid van galvanometrische waarnemingen vindt men o.a. een voorbeeld in het rapport van Rubens, waar hij, om de gevoeligheid van den radiomicrometer van Boys aan te geven, mededeelt, dat deze de door een hollen spiegel terug gekaatste straling van een kaars nog aantoont, wanneer die op een afstand van 2,8 kilometer geplaatst is.

Natuurlijk zou men zonder moeite het aantal dezer voorbeelden kunnen vermeerderen met behulp van de artikelen over de verschillende onderdeelen der metrologie, die, overeenkomstig het oorspronkelijk doel van het Congres, in het eerste deel een vrij ruime plaats innemen.

Dit deel begint met een bewonderenswaardig artikel van H. Poincaré (1—29) over de betrekking tusschen de experimenteele en de mathematische physica. Aan deze laatste kent hij de rol toe van bibliothecaris in de bibliotheek die de experimenteele physica aanlegt, en wijst haar als eerste taak aan de eenheid der natuur in 't licht te stellen, waarbij een verstandige zuinigheid met hypothesen moet worden betracht. Van uit dit gezichtspunt beschouwt hij den oorsprong der mathematische physica, het voorbijgaande karakter der physische theoriën, den drang dien velen gevoelen om elke verklaring ten slotte tot een mechanisme terug te brengen, en besluit een overzicht van den tegenwoordigen stand der wetenschap met de woorden:

„Tout compte fait, on s'est rapproché de l'unité; on n'a

pas été aussi vite qu'on l'espérait il y a cinquante ans, on n'a pas toujours pris le chemin prévu; mais, en définitive, on a gagné beaucoup de terrain."

Een illustratie van verschil van opvatting bij het zoeken naar de eenheid der natuur geeft de vergelijking van twee belangrijke rapporten, dat van LORD KELVIN, met den ietwat paradoxalen titel „Over de beweging van een vast elastisch medium, waarin zich een lichaam verschuift, dat er aantrekkend of afstootend op werkt" (II, 1—22) en dat van V. BJERKNES „Over hydrodynamische werking op afstand naar de theorie van C. A. BJERKNES" (I, 251–276). De eerste gaat ter verklaring van de electrische aantrekking tusschen electrons weer terug tot de directe werking op afstand, waardoor de ether bevrijd wordt van „de onmogelijke taak om gelijktijdig de electrostatische en de magnetische kracht voort te planten." Het geheele rapport van den tweeden is gewijd aan een poging om door hydrodynamische contact-krachten *schijnbare* werking op afstand te verklaren, waarbij een volledige analogie met electrische en magnetische krachten ontwikkeld wordt.

Van de rapporten die de meest waarschijnlijke waarde van een of andere constante bespreken, kiezen we die over voortplantingssnelheden. J. VIOLLE (I, 228—246) behandelt de snelheid van het geluid in de lucht, een onderwerp, waarover hij zelf de nieuwste en nauwkeurigste proeven heeft genomen. Zijn eindresultaat, 331,36 M. ± 0,03 M., niet zoo heel veel afwijkende van de uitkomst van Moll en van Beek, 332,8 M., is natuurlijk veel nauwkeuriger, wat echter eerst in den laatsten tijd bereikt is. Des te meer moet men het waardeeren, dat, volgens het rapport van CORNU (II, 225—246) de metingen van de snelheid van het licht, voerende tot de uitkomst 300130 K.M. ± 270 K.M., dus een slechts tienmaal grootere onzekerheid laten. MICHELSON en NEWCOMB meenen zelfs met hun methode bij een uitkomst 299860 K.M. een onzekerheid van niet meer dan 30 K.M. te moeten aannemen; CORNU's ruimere schatting steunt op het vermoeden van een systematische tout.

Over de voortplantingssnelheid der eerst zoo kort bekende electrische golven handelt een omvangrijk rapport van BLONDLOT en GUTTON (II, 268—283). De middelwaarde, door de schrijvers niet bepaald wegens de moeilijkheid, aan de omstreeks

1 % uiteenloopende uitkomsten juiste relatieve gewichten te geven, moet zeer dicht bij de lichtsnelheid liggen. Zooals men weet was dit door de theorie van MAXWELL voorspeld. Deze voorspelling hield bovendien in, dat de verhouding van de electromagnetische tot de electrostatische eenheid van electriciteit gelijk aan de lichtsnelheid moest zijn. Die verhouding heeft het onderwerp uitgemaakt van vele onderzoekingen van den laatsten tijd, die in het rapport van ABRAHAM (II, 247—267) besproken worden. De middelwaarde, evenals de lichtsnelheid tot het luchtledige herleid, is 300100 KM ± 300 KM. — dus reeds dezelfde zekerheid als in de bepaling der lichtsnelheid, en de beide uitkomsten binnen de grenzen der waarnemingsfout gelijk.

Behalve deze directe verificaties zouden nog tal van andere rapporten als bevestiging van de electromagnetische lichttheorie beschouwd kunnen worden. Onder deze vormt het rapport van RUBENS over het infraroode spectrum (II, 141—174) als 't ware de brug tusschen electriciteit en licht. Zeer instructief is in dit opzicht een schema, waarin RUBENS de golflengten naar octaven afteekent, en waarin tusschen de kleinste electrische golven en de grootste warmte-golven slechts 5 octaven ontbreken, terwijl aan beide zijden ongeveer 10 octaven waargenomen zijn.

Een zeer bevredigend geheel vormen de rapporten van WIEN, over de theoretische stralingswetten (II, 23—40) en LUMMER, over de straling der zwarte lichamen (II, 41—99). In 't eerste wordt nagegaan hoe men, uitgaande van de wet van KIRCHHOFF, de tweede wet der mechanische warmte-theorie in 't algemeen en de kinetische gastheorie, achtereenvolgens de wet van STEFAN (totaalstraling evenredig met de 4e macht der absolute temperatuur) en de wet van WIEN ($\lambda_{max.}$ omgekeerd evenredig met de absolute temperatuur) en zelfs de verdeeling der energie over de verschillende golflengten kan afleiden, wat op geheel verschillende wijze door WIEN en PLANCK is verricht. In het rapport van LUMMER vindt men de experimenteele bevestiging dezer wetten — wat de energiekromme aangaat met beperking tot matige golflengten, daar in tegenstelling met RUNGE en PASCHEN door LUMMER en PRINGSHEIM bij grootere golflengten vrij sterke afwijkingen gevonden zijn. De vooruitgang in de thermometrie en pyrometrie waarop de rapporten

van CHAPPUIS en BARUS betrekking hebben (I, 131—147 en 148—177) heeft zeker veel tot het slagen dezer verificatie bijgedragen.

Minder eenvoudig zijn de wetten van de straling der gassen, die door PRINGSHEIM behandeld wordt (II, 100—132). Het is vrij zeker, dat hierop, althans bij lijnenspectra en overal waar fluorescentie of electrische ontlading in 't spel komt, de wet van KIRCHHOFF niet toepasselijk is. De theorie van deze straling is nog niet ver ontwikkeld; men mag echter hopen, dat de onderzoekingen van serie-spectra, door RYDBERG behandeld (II, 200—224) den weg zullen aanwijzen. Noemt men de spectra met RYDBERG de taal der atomen, dan leeren deze onderzoekingen onder anderen, dat elke groep van verwante elementen zijn eigen tongval heeft.

Het ruime gebied van de evenwichten van gassen en vloeistoffen wordt behandeld in de rapporten van AMAGAT (enkelvoudige stoffen, I, 551—582) en VAN DER WAALS (mengsels, I, 583—614). AMAGAT, wiens onderzoekingen het waarnemingsgebied belangrijk verruimd hebben, heeft daardoor kunnen constateeren, dat tot nu toe geen formule met weinig constanten dat gebied beheerscht, en bepaalt zich daarom tot het aangeven van een aantal experimenteele regels. Aan het slot toont hij evenwel aan, van hoe groot belang de formule van VAN DER WAALS is voor de wetten der overeenstemmende toestanden. VAN DER WAALS zelf leidt de toestandsvergelijking voor mengsels hoofdzakelijk uit theoretische beschouwingen af, die echter reeds in vele gevallen bevestiging gevonden hebben door de onderzoekingen van, bijna uitsluitend Nederlandsche, physici. Tevens wordt duidelijk aangewezen, wat nog verificatie noodig heeft. De methoden ter onderzoeking van het meest merkwaardige gebied, dat der kritische toestanden, worden in afzonderlijke rapporten van MATHIAS (I, 615—648) en GALITZINE en WILIP (I, 668—681) besproken.

De eigenlijke grondslag van de theorieën op dit gebied is, naast de wetten der mechanische warmtetheorie, de kinetische gastheorie. Het is daarom eenigszins jammer, dat deze theorie zelf geen eigenlijke bespreking gevonden heeft; slechts een onderdeel, de diffusie van gassen, en daarvan nog slechts een enkel punt, wordt door BRILLOUIN besproken (I, 512—530). Dit is te meer te betreuren, waar wel plaats is gegeven aan

een oppervlakkig betoog van LIPPMANN (I, 546—550) om te bewijzen, dat de kinetische gas-theorie in strijd is met de meervermelde tweede wet — MAXWELL's „demon" redivivus, thans in de gedaante van een electromagneet! Ook wat betreft andere onderdeelen der natuurkunde heeft de kinetische theorie het niet gelukkig getroffen. Wel wordt de electrolytische dissociatie der oplossingen zeer gelukkig door ARRHENIUS behandeld (II, 365—389), maar terwijl men had mogen verwachten de theorie van den osmotischen druk en wat daarmede samenhangt door VAN 'T HOFF behandeld te zien, geeft deze een overzicht van de — overigens zeer belangrijke — verschijnselen van kristallisatie bij constante temperatuur (I, 464—477), dat noodzakelijkerwijze hoofdzakelijk empirisch is. De osmotische druk wordt door PERRIN behandeld (I, 531—555), die zich sinds een paar jaar aan dit gedeelte der natuurkunde wijdt en een min of meer populair overzicht heeft geleverd.

Ook bij de verschijnselen in vaste stoffen ziet men reeds meer en meer aanduidingen van het doordringen van kinetische theorieën. De rapporten van SPRING (I, 402—431) en van ROBERTS AUSTEN en STANSFIELD (I, 363—401) zijn daar om de grenzen tusschen vast en vloeibaar uit te wisschen: beide handelen over ontwijfelbaar bewezen inwendige bewegingen in vaste lichamen, terwijl aan den anderen kant SCHWEDOFF (I, 478—486) in sommige vloeistoffen eigenschappen van vastheid ontdekt heeft. Het zijn zeker niet in de laatste plaats de electrische en magnetische verschijnselen, die van de invoering van kinetische beschouwingen zouden profiteeren. Voorloopig treffen de rapporten over deze onderwerpen voornamelijk door het geweldige materiaal van feiten. Die van DU BOIS over de magnetische eigenschappen der ponderabele stof (II, 460—508) en WARBURG over een enkel onderdeel van 't voorgaande, de hysteresis, (II, 509—531) beslaan samen 72 pagina's, bijna zonder dat er sprake is van theorie. Bij de contact-electriciteit, bijna het oudste onder de electrische verschijnselen, wordt blijkens het rapport van CHRISTIANSEN (II, 390—402) nog heftig over de feiten zelf gestreden en staan de voornaamste theorieën nog onverzoenlijk tegenover elkaar.

Nu zijn wel in de laatste jaren theorieën op dit gebied verschenen, die gebruik maken van kinetische beschouwingen, maar deze worden, waarschijnlijk als te jong en onzeker, in

de rapporten bijna niet genoemd. DRUDE, die op dit gebied zeker wel thuis is, geeft van zijn eigen theorie alleen dat gedeelte dat op de dispersie van het licht in metalen betrekking heeft (III, 34—46) terwijl J. J. THOMSON (III, 138—151) met gebruikmaking van vrij gewaagde, onzes inziens soms onwaarschijnlijke hypothesen, en zonder veel acht te slaan op zijn voorgangers op dit gebied, enkele toepassingen maakt van de theorie der electrons op de geleiding in metalen, diamagnetisme en verwante verschijnselen.

Naast de merkwaardige ontdekkingen op het gebied der kathodenstralen, door VILLARD behandeld (III, 115—137) heeft ongetwijfeld de ontdekking door ZEEMAN van den invloed van een magneetveld op de uitzending van licht veel bijgedragen tot het doordringen van deze electron-theorie. Het rapport van LORENTZ over dit onderwerp (III, 1—33) geeft een treffend voorbeeld van gelukkige samenwerking van experiment en theorie: moge de theorie nog niet in staat zijn, van alle bijzonderheden rekenschap te geven, aan den anderen kant was ze reeds ver genoeg in het wezen der verschijnselen doorgedrongen om op belangrijke punten de proefnemers te kunnen voorlichten. Zonder dit was het hooge peil, waartoe thans de kennis dezer verschijnselen gestegen is niet te bereiken geweest.

We moesten ons beperken tot de bespreking van deze onderwerpen, die tot de meest bekende behooren, en onvermeld laten de rapporten over de nieuwe stralensoorten en die over verwante vakken als meteorologie, kosmische physica, astrophysica en physiologie, die het grootste gedeelte van het derde deel vullen.

Men kan van meening verschillen over de meerdere of mindere waarde van de afzonderlijke rapporten en met de uitgevers betreuren, dat sommige hoofdstukken der natuurkunde geen bewerker hebben gevonden. Stellig evenwel is men aan de Société française de Physique, en in 't bijzonder aan de H.H. GUILLAUME en POINCARÉ, grooten dank verschuldigd voor hun aandeel aan een werk, dat waarschijnlijk nog lang de aandacht trekken zal als een monument op den drempel eener nieuwe eeuw.

E. VAN EVERDINGEN JR.

G. Bigourdan, Astronome titulaire à l'observatoire de Paris. Le système métrique des poids et mesures, son établissement et sa propagation graduelle, avec l'histoire des opérations qui ont servi à déterminer le mètre et le kilogramme. In 8°., 458 p., 17 fig., 3 pl., 7 portr., Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Wanneer men let op de verrassende snelheid, waarmee in onzen tijd de geheele natuurwetenschap zich ontwikkelt en de techniek zich van haar vruchten meester maakt om ze onmiddellijk ten gerieve van de menschheid te verwerken, moet het op den eersten aanblik verbazing wekken dat de ontwikkeling en algemeene invoering van een eenvormig stelsel van maten en gewichten — een zaak van zoo onbetwistbaar belang — een episode vormt in de geschiedenis van beschaving en wetenschap, die zich reeds over meer dan een eeuw uitstrekt en zelfs thans nog haar einde niet heeft gevonden. In wetenschap en techniek zijn het echter steeds begrippen en voorstellingen van een betrekkelijk zeer kleine fractie der menschheid, op wier kneedbaarheid het aankomt, en dan nog juist begrippen en voorstellingen, die in 't gebied van ieders eigen bijzondere ontwikkeling liggen en, bij het meerendeel, van den aanvang af opzettelijk vlottend worden gehouden. Bij de invoering van 't metriek stelsel daarentegen zijn het geheele natiën, die in een nieuw spoor moeten worden geleid, en bij de bijna oneindig groote massa moet dat wel zeer veel arbeid kosten. In 't begin der groote Fransche Revolutie ondernomen, op een oogenblik dus dat de volksgeest meer dan ooit geneigd was ouds overboord te werpen en nieuws te aanvaarden, vond nog die arbeid den heerschenden hervormingsgeest niet opgewassen tegen de kracht der gewoonte, waar het betrof het niet geheel onmiddellijk op het volkswelzijn ingrijpende gebruik van maten en gewichten. Met taaie volharding hebben nochtans Frankrijks geleerden en bewindsmannen het werk zoover gebracht, dat een goede uitslag is verzekerd; met talent ook hebben de eersten daarbij de talrijke moeilijkheden overwonnen, die het kiezen en vervaardigen van de grondmaten, alsmede de geodetrische, physische en chemische onderzoekingen ter voorbereiding, hebben met zich gebracht.

Het is zeker een verdienstelijk werk van den schrijver geweest, van dit geheele brokstuk geschiedenis met zijn eng in

elkaar grijpen van politieke gebeurtenissen, maatschappelijke toestanden en wetenschappelijke belangen een eenigszins uitvoerig overzicht te hebben gegeven, waarmee menigeen met voldoening zal kennis maken. Hoewel de schrijver er blijkbaar en met vrucht naar heeft gestreefd geheel objectief te blijven, heeft hij het niet versmaad hier en daar meer leven aan zijn beschrijving bij te zetten door een frissche verscheidenheid ook van persoonlijke bijzonderheden te bieden — zeer tot verhooging van de leesbaarheid van het boek, dat uit den aard der zaak overigens wel voor een groot deel moest bestaan uit een mededeeling van rapporten, decreten, reglementen enz..

Het meest aangenaam te lezen is in dat opzicht het eerste gedeelte, handelende over het werk bovenal van Delambre, maar verder ook van Méchain, Borda, Coulomb, Lagrange, Laplace, Van Swinden e. a. tot het verkrijgen der gewenschte standaardmaten en -gewichten en de wettelijke invoering daarvan (1803). Minder verkwikkelijk is de dan volgende beschrijving van de moeite en inspanning, die men zich tot 1869 heeft moeten getroosten om het nieuwe stelsel ook inderdaad ingang te doen vinden. In dit jaar begint de medewerking van de regeeringen en geleerden der andere Europeesche Staten en wordt het vraagstuk internationaal, en het is aan een geheel zakelijk overzicht van de werkzaamheden van de Internationale Commissie (1869—1872), de Diplomatieke Conferentie van 1875 en het Internationale Bureau des Poids et Mesures, dat een groot gedeelte van het geheele boek is gewijd. De onderzoekingen van Michelson tot het reduceeren van den lengtestandaard tot golflengten van het Cadmiumlicht bleven niet onvermeld. Een bibliographie van de uitgaven van de Commission Internationale du Mètre en van het Comité International des Poids et Mesures (1870—1900), voorts een naar het schijnt zeer volledige chronologische tabel van wetten, decreten, belangrijke feiten enz. in zake het metrieke stelsel, een naamregister en eindelijk een gedetailleerd inhoudsoverzicht besluiten het vooral uit een historisch oogpunt belangrijke werk, tot welks samenstelling de schrijver uit de meest authentieke bronnen heeft kunnen putten. W.

Henri Bénard, ancien élève de l'École Normale Supérieure, aggrégé des Sciences physiques. Les tourbillons cellu-

laires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent. Thèse. In 8°, 88 p., 28 fig., Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Wanneer van een vlakke schaal met vloeistof de bodem horizontaal is en op een standvastig aantal graden boven de temperatuur der omgeving wordt gehouden, treden er in de vloeistof wervelbewegingen op, eerst van een labiel karakter, na verloop van tijd echter — indien de vloeistof een voldoende mate van viscositeit bezit — overgaande in een stationair régime. De schrijver, die vroeger reeds deze wervelbewegingen in hun labiele stadium heeft bestudeerd, deelt hier de uitkomsten mee van een experimenteel onderzoek der stationair geworden wervels. De vloeistof was spermaceti en werd onderzocht bij temperaturen tusschen 50 en 100° C. van den bodem der schaal, terwijl de dikte der vloeistoflaag werd gevariëerd tusschen 0.4 en 1.2 mm.

De stationaire toestand blijkt zich te kenmerken door een verdeeling van de laag in gelijke regelmatig-zeshoekig-zuilvormige cellen, waarvan elk één wervel bevat met opstijging in het midden en neerdaling aan de kanten. Noemen wij e de dikte der laag en λ de zijde van de zeshoekige doorsnede der cellen, dan is het de verhouding $\frac{e}{\lambda}$ voornamelijk welke, onder verschillende omstandigheden, door schrijver is bestudeerd. De meest in 't oog springende zijner daarbij verkregen uitkomsten is wel deze, dat die verhouding slechts in geringe mate afhankelijk is van de dikte der laag; zij was steeds bijna 0.3 en hing eenigszins van de temperatuur af. De wervelcellen werden meestal photografisch opgenomen en dan wel na door het inbrengen van een onoplosbaar poeder in de vloeistof zichtbaar gemaakt te zijn of met behulp van diverse optische methoden, daarop gebaseerd, dat het vloeistofoppervlak boven elke wervelcel een inzinking bezit (van de orde van 0.5 μ). De bij subjectieve waarneming geschatte lineaire snelheden in de wervels bedragen tot 0.2 cm p. sec.

De schrijver vermoedt, dat de studie van soortgelijke verschijnselen als deze in een homogene vloeistof enkel onder den invloed van temperatuursverschillen en viscositeit optredende cellulaire structuur misschien licht zal kunnen werpen op zekere fundamenteele biologische quaesties. W.

EEN GEVAL VAN VLOEISTOFBEWEGING ZONDER WERVELING IN TWEE AFMETINGEN,

DOOR

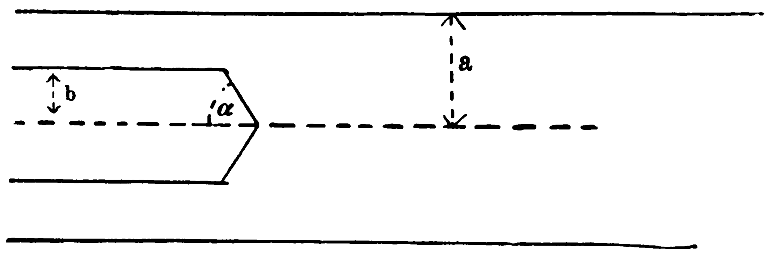
W. A. WYTHOFF.

(Amsterdam.)

(Oplossing van Prijsvraag no. 6 voor het jaar 1900.)

De opgave luidde aldus:

Vloeistof stroomt zonder wrijving en zonder werveling door een kanaal van gelijkmatige diepte en van de gedaante aange-.



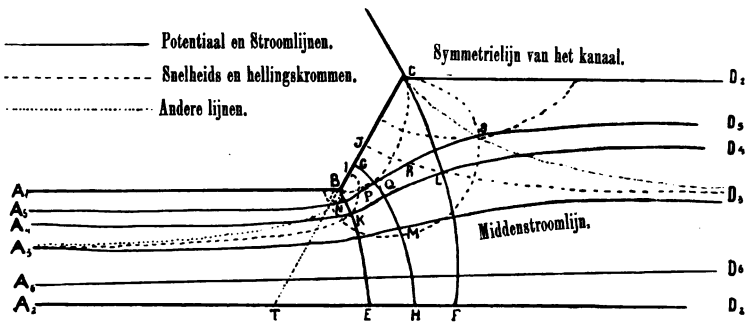
geven in bovenstaande figuur. In het oneindige is de snelheid aan beide zijden gelijkmatig en bedraagt respectievelijk U en $\frac{a-b}{a}$ U. Men vraagt naar de snelheidspotentiaal dezer vloeistofbeweging, en wenscht, zooveel mogelijk, eene discussie der banen door de vloeistofdeeltjes afgelegd. Voorts wordt gevraagd te onderzoeken, of de in LAMB's *Treatise on the mathematical theory of the motion of fluids*, (editie 1879, Vraagstuk No. 13, p. 254) voor het geval $\alpha = 90°$ gegeven oplossing juist is. In die oplossing wordt voor de snelheidspotentiaal aangegeven:

$$\frac{a-b}{a}\,\mathrm{U}x + \frac{2a\mathrm{U}}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi b}{a}\cos\frac{n\pi y}{a}\,e^{-\frac{n\pi x}{a}}.$$

I. Grondslagen.

1. Uit de symmetrie der figuur is het duidelijk, dat de symmetrielijn van het kanaal een stroomlijn is, en dat aan weerszijden van die symmetrielijn de vloeistofbeweging dezelfde is, ook wat de snelheidspotentiaal betreft. Wij hebben dus slechts de beweging in een der beide helften na te gaan, waarvoor ik de onderste kies; zie Fig. 1.

Fig. 1 (z-vlak).



2. Noemen wij $z = x + iy$ de complexe coördinaat, waardoor een punt in het vlak bepaald wordt en passen wij de transformatiemethode van SCHWARZ [1]) toe, zoo is het mogelijk de figuur zoo te transformeeren, dat de lijnen D_1C, CB, BA_1, A_2D_2 in opeenvolgende stukken van een rechte lijn overgaan met behulp van een transformatieformule van den vorm

$$z = c\int (t - p_1)^{-\frac{a}{\pi}} (t - p_2)^{\frac{a}{\pi}} (t - p_3)^{-1}\, dt,$$

waarin $p_1 < p_2 < p_3$. Van deze grootheden p_1, p_2 en p_3 kunnen wij er nog twee willekeurig aannemen, mits aan de opgegeven ongelijkheid voldoende. Wij maken hiervan gebruik om $p_1 = -1$ en $p_3 = 0$ te stellen en weten dan dat p_2 tusschen 0 en -1 moet liggen en door de gegevens in het z-vlak bepaald is.

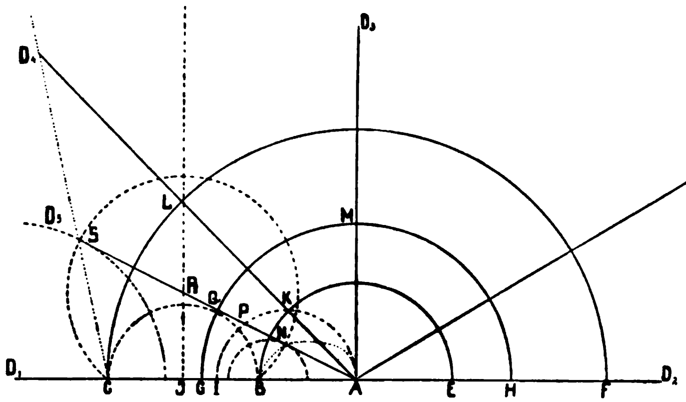
[1]) Ik ontleen deze methode aan J. J. Thomson, Notes on recent researches in Electricity and Magnetism; Chapter 3, §§ 230 en volgende. Oxford, the Clarendon press, 1893.

Wij stellen nu $p_2 = -p$, waarin p een positief getal < 1 is, en schrijven voorts ter vereenvoudiging $\alpha = m\pi$, door m eveneens een positief getal < 1 voorstellende. Onze transformatieformule gaat daardoor over in

$$z = c\int \frac{1}{t}\left(\frac{t+p}{t+1}\right)^m dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

3. Fig. 2 stelt het t-vlak voor [1]). In beide figuren zal ik

Fig. 2 (t-vlak).



steeds de overeenkomstige punten door dezelfde letters aangeven, en ze zoo noodig door de indices z of t van elkaar onderscheiden. Uit de wijze van transformatie is het duidelijk, dat wij in het z-vlak een punt in het oneindige aan links (A) en een aan rechts (D) hebben te onderscheiden, terwijl in het t-vlak het oneindige als één punt, het punt D, moet worden opgevat. Ter betere onderscheiding van de verschillende naar het oneindige loopende lijnen heb ik de schrijfwijze A_1, A_2, enz., D_1, D_2 enz. ingevoerd.

4. Door de onderstelling $p_3 = 0$ (§ 2) is het punt A de oorsprong in het t-vlak geworden.

De vorm onder het integraalteeken in (1) is voor punten van de lijn $A_tD_{3,t}$ bestaanbaar en positief, waaruit blijkt, dat de x-as in het z-vlak de richting A_2D_2 moet hebben. Door

[1]) In fig. 1 en fig. 2 zijn duidelijkshalve *verschillende* waarden van p aangenomen. Daardoor komt het, dat de door N en S gaande hellingskromme (§ 19) in fig. 1 de middenstroomlijn *wel* en in fig. 2 *niet* snijdt.

de onderste integratiegrens niet aan te geven laten wij den coördinatenoorsprong in het z-vlak voorloopig onbepaald.

De beschouwde helft van het kanaal wordt nu conform afgebeeld in de helft van het t-vlak boven de abscissen-as D_1D_2 gelegen. Desverlangd kunnen wij ons de andere helft van het t-vlak voorstellen verwant te zijn met de andere helft van het kanaal, indien wij nl. overeenkomen de abscissenas bij het integreeren niet anders dan links van het punt C te overschrijden.

5. De verwante vloeistofbeweging in het t-vlak is nu een strooming van uit het punt A als bron, waarbij de stroomlijnen van A uitgaande rechte lijnen zijn en de potentiaallijnen concentrische cirkels die A tot middelpunt hebben.

Noemen wij ϕ de potentiaal en ψ de stroomfunctie en stellen wij $w = \phi + i\psi$, dan geldt voor deze eenvoudige beweging de formule

$$t = e^{kw} \quad \text{of} \quad w = \frac{1}{k} l(t) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

6. Thans moet nog het verband worden vastgesteld tusschen de grootheden c, p, m en k en de gegevens van het vraagstuk a, b, α en U.

Daartoe bedenken wij, dat, zoo wij de integratie volbrengen van een punt van AD_2 boven om A heen naar een punt van AB, wij als resultaat het verschil der z's tusschen de overeenkomstige punten van het z-vlak moeten vinden, en dat daarvan het imaginaire deel $(a - b)i$ is. Volbrengen wij deze integratie in een half cirkeltje zeer dicht om A heen, zoo vinden wij

$$cp^m \pi i = (a - b)i$$

en dus

$$c\pi p^m = a - b.$$

Kiezen wij als beginpunt van den integratieweg een punt van AD_2 en als eindpunt een van CD_1, dan moet evenzoo het imaginaire deel van de integraal ai worden. Deze integratie volbrengende langs een oneindig grooten halven cirkel die A tot middelpunt heeft, vinden wij

$$c\pi i = ai$$

$$c\pi = a.$$

Daarenboven weten wij nog, dat bij beide vloeistofbewegingen

de totale strooming even groot moet zijn. Dit geeft ons de betrekking

$$\frac{\pi}{k} = (a - b)\,\mathrm{U}.$$

7. Wij hebben dus de volgende formules die c, p, m en k in de gegevens van het vraagstuk uitdrukken:

$$\left.\begin{array}{ll} c = \dfrac{a}{\pi}; & m = \dfrac{\alpha}{\pi} \\ p = \left(\dfrac{a-b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} & k = \dfrac{\pi}{(a-b)\,\mathrm{U}} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

Omgekeerd:

$$\left.\begin{array}{ll} a = c\pi; & \alpha = m\pi \\ b = c\pi\,(1 - p^m); & \mathrm{U} = \dfrac{1}{ckp^m} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bij de hier volgende beschouwingen maak ik in den regel gebruik van de grootheden c, p, m en k.

8. Wij kunnen nu nog uit (1) en (2) de hulpgrootheid t elimineeren en vinden dan

$$z = ck \int \left(\frac{e^{kw} + p}{e^{kw} + 1}\right)^m dw\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waardoor het verband is vastgesteld tusschen potentiaal en stroomfunctie in een willekeurig punt van het kanaal en de coördinaten van dat punt.

Hieruit volgt:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{ck}\left(\frac{e^{kw} + 1}{e^{kw} + p}\right)^m = \frac{1}{ck}\left(\frac{t+1}{t+p}\right)^m \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Deze $\dfrac{dw}{dz}$ geeft de snelheid van een vloeistofdeeltje in richting en grootte aan, met dien verstande dat wij om de juiste richting te vinden van het imaginaire deel het teeken moeten omkeeren, of wel aan den modulus van $\dfrac{dw}{dz}$ (die de juiste grootte van de snelheid aangeeft) de richting van $\dfrac{dz}{dw}$ moeten toekennen.

9. In de tot nu toe gegeven formules liggen alle eigenschappen der te behandelen vloeistofbeweging in beginsel opgesloten. In het nu volgende stel ik mij voor:

1°. de eigenschappen van stroomlijnen, potentiaallijnen enz. na te gaan op grond van de meetkundige verwantschap van de z- en de t-figuur;

2°. formules te geven betreffende potentiaal en stroomfunctie;

3°. Lamb's formule voor het geval $m = \frac{1}{2}$ te controleeren.

II. Stroomlijnen, potentiaallijnen enz.

10. Reeds werd opgemerkt, dat de stroomlijnen in het t-vlak rechte lijnen zijn van A uitgaande. Een van hen, de lijn AD_3, die door A loodrecht op D_1D_2 kan worden getrokken, zal in de hier volgende beschouwingen meermalen genoemd moeten worden; ik zal haar den naam van *middenstroomlijn* geven. Zij heeft de eigenschap dat de totale strooming aan weerszijden er van gelijk is. Hieruit volgt, in aanmerking nemende dat de snelheid in het kanaal aan beide zijden in het oneindige gelijkmatig is, dat de *middenstroomlijn* A_3D_3 in het z-vlak naar links asymptotisch loopt aan de rechte lijn evenwijdig aan A_1B en A_2D_2 midden tusschen beide in getrokken, en evenzoo naar rechts asymptotisch aan een evenwijdige lijn midden tusschen A_2D_2 en CD_1.

11. De snelheid van een vloeistofdeeltje in het kanaal wordt in richting en grootte bepaald door $\frac{1}{ck}\left(\frac{t+1}{t+p}\right)^m$, zie § 8.

Hierin stellen $t + 1$ en $t + p$ de afstanden van het verwante punt in het t-vlak tot C_t en B_t voor, beide als complexe grootheden opgevat.

Hieruit volgt: 1°. dat de grootte van de snelheid in elk punt de m^{de} macht is van de verhouding der afstanden van het verwante punt tot C_t en B_t vermenigvuldigd met de constante $\frac{1}{ck}$ d. i. met de eindsnelheid (zij is dus 0 in C en ∞ in B); 2°. dat de helling der baan in elk punt gelijk is aan m-maal den hoek waaronder het stuk B_tC_t van uit het verwante punt gezien wordt.

Daar voorts van de lijnen die het verwante punt met B_t en C_t verbinden de eerste altijd met de wijzers van het uurwerk

moet worden gedraaid om met de laatste samen te vallen, zien wij, dat de helling der stroomlijnen in de beschouwde helft van het kanaal overal denzelfden zin heeft en wel positief is (zie § 8). In de andere helft van het kanaal is zij natuurlijk negatief.

De gezichtshoek waaronder BC in het t-vlak gezien wordt, kan niet grooter zijn dan π. De helling der stroomlijnen in het z-vlak kan dus niet grooter zijn dan $m\pi = \alpha$; dit is de helling van de lijn BC.

12. Twee merkwaardige stelsels van krommen worden ons door deze beschouwingen aan de hand gedaan, nl.:

1°. *krommen van gelijke snelheid* (snelheidskrommen). Volgens een bekende planimetrische eigenschap zijn dit in het t-vlak cirkels die alle hun middelpunt op D_1D_2 hebben en het stuk BC harmonisch verdeelen; de rechte lijn die BC loodrecht middendoor deelt inbegrepen. Te zamen vormen zij een cirkelbundel, die B en C tot verdwijnpunten heeft.

2°. *krommen van gelijke helling* of bewegingsrichting (hellingskrommen). In het t-vlak zijn dit cirkelbogen die B met C verbinden. Te zamen vormen zij een cirkelbundel met B en C tot basispunten.

Beide stelsels van cirkels snijden elkaar in elk punt van het t-vlak loodrecht en daar bij de transformatie van de t- tot de z-figuur alle hoeken onveranderd blijven (behalve alleen in de punten A, B, C en D), volgt hieruit, dat ook in de z-figuur de snelheids- en hellingskrommen elkaar in alle punten loodrecht zullen snijden [1]).

13. De snelheidskrommen gaan alle van een punt van de lijn BC uit, en zijn in drie afdeelingen te splitsen naar gelang zij hun eindpunt hebben op BA (in het z-vlak BA_1), AD_2 (z-vlak A_2D_2) of D_1C. Die van de eerste afdeeling behooren bij snelheden grooter dan de beginsnelheid, nl. tusschen ∞ (het punt B) en $\dfrac{1}{ckp^m} = U$; die van de tweede afdeeling bij snelheden

---

[1]) Dit is een algemeene eigenschap der vloeistofbeweging zonder werveling in twee afmetingen. Wij zien dit in, indien wij bedenken, dat van $l\left(\frac{dw}{ds}\right)$ het bestaanbare gedeelte uitsluitend van de snelheid, het onbestaanbare gedeelte van de bewegingsrichting afhangt (zie § 8).

kleiner dan de begin- doch grooter dan de eindsnelheid, nl. tusschen $\dfrac{1}{ckp^m} = U$ en $\dfrac{1}{ck} = \dfrac{a-b}{a} U$; die van de laatste eindelijk bij snelheden kleiner dan de eindsnelheid, nl. tusschen $\dfrac{1}{ck}$ en 0 (het punt C). Die van de middelste afdeeling snijden de middenstroomlijn AD_3 (z-vlak A_3D_3), de overige snijden deze niet.

De overgangen tusschen deze drie afdeelingen worden in het t-vlak gevormd door den cirkel IKA en de rechte JL. De overeenkomstige krommen in het z-vlak, IA_3 en JD_3, loopen asymptotisch aan de middenstroomlijn.

14. Trekken wij in het t-vlak de cirkels die A tot middelpunt hebben en door B en C gaan (potentiaallijnen), zoo snijden deze den cirkel IKA en de rechte JL in de punten K en L, waarvan wij planimetrisch gemakkelijk aantoonen, dat ze met A in één rechte liggen.

De verwante punten K en L in het z-vlak, waarin de snelheidskromme IA_3 en JD_3 de potentiaallijnen BE en CF snijden, liggen dus op dezelfde stroomlijn A_4D_4.

15. De hellingskrommen zijn in het t-vlak cirkelbogen die van B naar C loopen; zij zullen dus ook in het z-vlak hun uiteinden in B en C hebben. Die welke bij de grootste helling, $m\pi$, behoort, is de lijn BC zelf; bij afnemende helling verwijdert zich de kromme meer en meer van BC; nadert de helling tot 0, zoo legt zich ten slotte de hellingskromme tegen de rechte lijnen BA_1, A_2D_2 en D_1C aan; voor de helling 0 bestaat de kromme uit deze drie rechte lijnen, waarvan men zich aan de eene zijde in het oneindige de uiteinden A_1 en A_2 en aan de andere zijde D_1 en D_2 verbonden kan denken.

16. Denken wij ons in het t-vlak een willekeurige stroomlijn, b.v. AD_5, en gaan wij van A uitgaande het beloop van den hoek na, waaronder van een punt dier lijn uit het stuk BC gezien wordt, dan blijkt het, dat deze hoek in A van 0 uitgaat, daarna grooter wordt, een maximum bereikt in een punt Q waar de lijn raakt aan een door B en C gaanden cirkelboog, vervolgens weder afneemt en in het oneindige 0 wordt.

Dit overbrengende op de z-figuur vinden wij, dat elke

stroomlijn met toenemende helling begint (holle zijde naar de pier gekeerd), daarna één buigpunt heeft en vervolgens met afnemende helling (tegengestelde kromming) voortgaat. De limiethelling is aan beide zijden 0.

17. Wat de plaats van het punt Q betreft, hebben wij in het t-vlak:

$$AQ^2 = AB \cdot AC$$

en dus

$$AQ = \sqrt{p}.$$

De meetkundige plaats van het punt Q_t is dus een cirkel die A_t tot middelpunt heeft, en dus een potentiaallijn. Wij zien echter gemakkelijk in, dat deze cirkel tevens het stuk BC harmonisch verdeelt en dus snelheidskromme is. [1]

De meetkundige plaats van het buigpunt Q (z-vlak) der stroomlijnen is dus een kromme GH die tegelijkertijd potentiaallijn en snelheidskromme is.

De bij deze kromme behoorende snelheid is gemakkelijk te berekenen. Wij vinden nl. voor de verhouding QB : QC (t-vlak) $\sqrt{p}$. Hieruit volgt, dat de snelheid middenevenredig is tusschen de begin- en de eindsnelheid of wel gelijk is aan

$$\frac{1}{ckp^{\frac{1}{2}m}} = U\sqrt{\frac{a-b}{a}};$$

en daar deze snelheid overal loodrecht op de kromme GH gericht is, weten wij ook, dat de lengte dezer kromme middenevenredig is tusschen de begin- en de eindbreedte van het halve kanaal, of wel:

$$\text{lengte } G_zH_z = c\pi p^{\frac{1}{2}m} = \sqrt{a(a-b)}.$$

18. Gaan wij thans na welk beloop de snelheid heeft, indien wij een bepaalde stroomlijn volgen. Wij hebben ons daartoe in het t-vlak het stelsel der snelheidscirkels voor te stellen en te zien welke dier cirkels door de stroomlijn achtereenvolgens worden gesneden of geraakt.

Hierbij doet zich een belangrijk verschil voor, naarmate de stroomlijn aan de eene of aan de andere zijde van de middenstroomlijn gelegen is.

Ligt de stroomlijn tusschen AD_2 en AD_3 (t-vlak), b.v. AD_6, zoo raakt zij geen enkelen snelheidscirkel. De verhouding der

afstanden tot C en B is voortdurend afnemende van $\frac{1}{p}$ af tot 1 toe. Dit laatste geldt ook voor de lijn AD_3 zelf.

Dit overbrengende in de z-figuur zien wij, dat, indien een vloeistofdeeltje een stroomlijn A_6D_6 volgt, buiten de middenstroomlijn gelegen (of wel zich langs deze zelf beweegt), de snelheid voortdurend afneemt van de beginsnelheid af tot de eindsnelheid toe.

Ligt de stroomlijn aan de andere zijde van de middenstroomlijn, b.v. AD_5 (t-vlak), zoo zijn er twee snelheidscirkels die er aan raken in de punten N en S. De verhouding der afstanden tot C en B is toenemende van A tot N, afnemende van N tot S en daarna weer toenemende van S tot in het oneindige.

Overgaande tot de z-figuur vinden wij het volgende. Indien een vloeistofdeeltje een stroomlijn A_5D_5 volgt binnen de middenstroomlijn gelegen, zoo is de snelheid eerst toenemende, bereikt een maximum in een punt N, neemt daarna af tot zij in een punt S een minimumwaarde bereikt, kleiner dan de eindsnelheid, waarna zij verder weder toenemende tot de eindsnelheid nadert.

19. Planimetrisch is gemakkelijk aan te toonen, dat de raakpunten N en S (t-vlak) de snijpunten zijn van AD_5 met een cirkel die zijn middelpunt R op AD_5 heeft en door B en C gaat. Deze cirkel is hellingskromme. Hieruit volgt (z-vlak), dat elke stroomlijn in haar punten van maximum en minimumsnelheid evenwijdige raaklijnen heeft.

20. De meetkundige plaats van N_t is een kromme die van B naar A loopt, geheel binnen den cirkel IKA ligt en in B en A raaklijnen heeft loodrecht op AD_1. Die van S_t is een kromme die van C uitgaat, geheel aan denzelfden kant van JL ligt en een asymptoot heeft evenwijdig aan AD_3 [1]).

De overeenkomstige meetkundige plaatsen BA_3 en CD_3 in het z-vlak loopen beide asymptotisch aan de middenstroomlijn.

[1]) Stellen wij $t = \xi + i\eta$, dan is de vergelijking dezer beide meetkundige plaatsen:

$$(\xi^2 + \eta^2)(1 + p + \xi) + p\xi = 0,$$

die van de asymptoot:

$$\xi = -(1 + p).$$

21. De helling van een stroomlijn in een punt van het z-vlak ten opzichte van de x-as is tevens die van de potentiaallijn ten opzichte van de y-as. De hellingskrommen die wij gebruikt hebben om de eigenschappen der stroomlijnen na te gaan, kunnen dus tevens dienen om te onderzoeken hoe de helling der potentiaallijnen is en of deze buigpunten hebben.

Wij hebben daartoe na te gaan welke der hellingscirkels in het t-vlak door de potentiaallijnen, d. i. door de cirkels die A tot middelpunt hebben, worden gesneden of geraakt. Wij kunnen deze potentiaalcirkels in drie afdeelingen splitsen, nl. 1°. die waarvan de straal kleiner is dan p (of AB), 2°. die waarvan de straal tusschen p en 1 (of AC) ligt, 3°. die waarvan de straal grooter dan 1 is.

Die van de middelste afdeeling raken aan geen enkelen hellingscirkel en snijden alle hellingscirkels. De overeenkomstige z-lijnen hebben dus geen buigpunt. Zij loopen van punten van de lijn BC naar punten van een stuk EF van de lijn A_2D_2 en ontmoeten deze beide lijnen loodrecht.

De overige potentiaalcirkels in het t-vlak raken alle aan één der hellingscirkels, terwijl aan beide zijden van dit raakpunt de hellingsverandering tegengesteld is. De overeenkomstige z-krommen hebben dus alle één buigpunt.

22. Op planimetrische gronden zien wij gemakkelijk in, dat in alle punten in het t-vlak waarin een potentiaallijn aan een hellingscirkel raakt, tevens een stroomlijn aan een snelheidscirkel raakt. In elk buigpunt eener potentiaallijn in het z-vlak is dus tevens de snelheid langs de stroomlijn die daardoor gaat maximum of minimum [1]).

---

[1]) Dit is weder een algemeene eigenschap der vloeistofbeweging zonder werveling in twee afmetingen, welke is af te leiden uit de algemeene eigenschap, vermeld bij § 12. Daar immers de snelheids- en hellingskrommen elkaar in elk punt van het vlak loodrecht snijden, weten wij dat de snelheidskrommen en de stroomlijnen elkaar raken in alle punten waarin een potentiaallijn aan een hellingskromme raakt en dat dus in die punten de snelheid langs de stroomlijn maximum of minimum, of althans stationair is. Als bijzonder geval zou het kunnen gebeuren, dat in alle punten van een stroomlijn de daardoor gaande potentiaallijnen buigpunten hebben; in dat geval moet de stroomlijn tevens snelheidskromme en dus de snelheid daarlangs constant zijn.

Omgekeerd zien wij op dezelfde wijze in, dat in het algemeen de snelheid maximum of minimum is in die punten der potentiaallijnen waarin de stroomlijnen

De reeds vermelde krommen BA_3 en CD_3 (§ 20) vormen dus de meetkundige plaats van de buigpunten der potentiaallijnen.

23. Het beloop der snelheid langs de potentiaallijnen blijft nog te onderzoeken over.

Het blijkt, dat de potentiaalcirkels in het t-vlak behalve in punten van de lijn D_1D_2 de snelheidscirkels niet aanraken. Voor die welke binnen den cirkel GMH liggen, blijkt de snelheid afnemende te zijn van het uiteinde der potentiaallijn op AG gelegen tot dat op AH toe. Voor de overige is de snelheid toenemende van af het uiteinde der potentiaallijn op GD_1 gelegen tot dat op HD_2 toe.

Dit overbrengende op de z-figuur zien wij, dat op alle potentiaallijnen links van GH gelegen de snelheid aan den middenkant van het kanaal het grootst is en afneemt naar den buitenkant, terwijl dit rechts van GH juist andersom is. Den overgang tusschen beide gevallen vormt de lijn GH waar de snelheid in alle punten even groot is.

24. Ik voer nu een nieuwe hulpgrootheid u in bepaald door de vergelijking

$$u = \frac{t+p}{t+1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

waaruit volgt:

$$t = -\frac{u-p}{u-1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Deze u staat volgens § 8 in eenvoudig verband tot de snelheid en de bewegingsrichting. Is nl. σ de snelheid en ϑ de hoek die de raaklijn aan de stroomlijn met de x-as in het z-vlak maakt, dan is

$$u^m = (ck\sigma)^{-1} e^{\vartheta i}$$

en dus

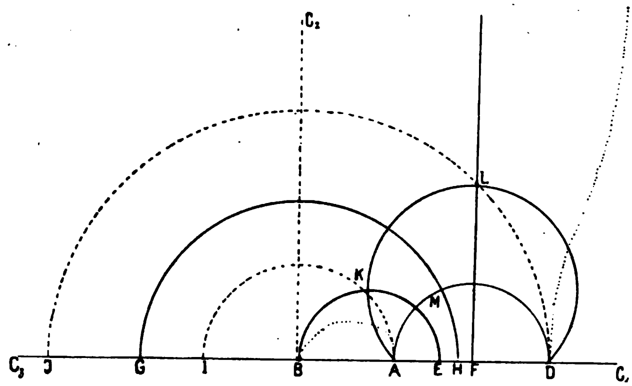
$$u = (ck\sigma)^{-\frac{1}{m}} e^{\frac{\vartheta}{m} i} = e^{-\frac{1}{m} l(ck\sigma) + \frac{\vartheta}{m} i}. \quad \ldots \quad (9).$$

buigpunten hebben, terwijl, indien zich het bijzondere geval voordoet dat alle punten eener potentiaallijn tevens buigpunten van stroomlijnen zijn, deze potentiaallijn tevens snelheidskromme is. Dit laatste bijzondere geval doet zich voor bij de potentiaallijn GH.

Deze grootheid u had ik even goed als t kunnen gebruiken om de eigenschappen van de stroomlijnen enz. na te gaan.

25. Beelden wij het kanaal in een u-vlak (Fig. 3) af, dan

Fig. 3 (u-vlak).



vinden wij uit de formules (7) en (8) gemakkelijk:

1°. voor de snelheidskrommen concentrische cirkels met het punt B_u (den oorsprong) tot middelpunt;

2°. voor de hellingskrommen rechte lijnen die door B_u gaan;

3°. voor de stroomlijnen cirkelbogen die de punten A ($u = p$) en D ($u = 1$) verbinden;

4°. voor de potentiaallijnen cirkels die AD harmonisch verdeelen.

26. Slaan wij nu het u-vlak om de lijn BC_2 (de ordinatenas) om, en leggen wij het daarna op het t-vlak, dan zien wij, dat het mogelijk is de potentiaallijnen, stroomlijnen, snelheids- en hellingskrommen van het u-vlak te doen samenvallen met de snelheidskrommen, hellingskrommen, potentiaallijnen en stroomlijnen van het t-vlak, zoo dat telkens met toenemende potentiaal afnemende snelheid en met toenemende stroomfunctie afnemende helling overeenkomt.

Hieruit volgt, dat er volledige overeenkomst moet bestaan tusschen de eigenschappen van potentiaal en stroomfunctie

eenerzijds en die van snelheid en helling anderzijds, zoodat wij uit eigenschappen van de eene onmiddellijk eigenschappen van de andere kunnen aflezen.

Zoo volgt b.v. uit het beredeneerde in § 18, dat er evenals een middenstroomlijn ook een „middenhellingskromme" moet bestaan, waardoor de hellingskrommen in twee groepen verdeeld worden, die verschillende eigenschappen bezitten, indien wij het beloop van de potentiaal daarlangs nagaan.

En evenzoo geven ons §§ 21—23 eigenschappen van de snelheidskrommen betrekking hebbende op de verandering van de stroomfunctie en de potentiaal daarlangs.

27. Onafhankelijk van deze meetkundige beschouwingen hadden wij dit kunnen afleiden uit de formules (7), (9) en (2). Hieruit toch blijkt, dat bij elk punt van het kanaal steeds een ander punt te vinden is, zoo dat de grootheden ϕ, ψ, σ, ϑ in beide punten door de volgende betrekkingen aan elkaar verbonden zijn:

$$\left.\begin{aligned} k\phi' &= -\frac{1}{m}\, l\,(ck\sigma), \\ k\phi &= -\frac{1}{m}\, l\,(ck\sigma'), \\ \frac{1}{m}\,\vartheta' &= \pi - k\psi, \\ \frac{1}{m}\,\vartheta &= \pi - k\psi'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Deze betrekkingen stellen een tegengesteld-conforme afbeelding van het kanaal in zichzelf vast, waarbij telkens twee punten wederkeerig in elkaar overgaan, terwijl verder potentiaallijnen en snelheidskrommen, stroomlijnen en hellingskrommen verwisseld worden.

De meetkundige plaats der punten die in zichzelf worden afgebeeld is in het t-vlak een cirkel die C tot middelpunt heeft en $\sqrt{1-p}$ tot straal, in het u-vlak een cirkel die D tot middelpunt heeft en $\sqrt{1-p}$ tot straal. In het z-vlak is het een kromme die van een punt van CD_1 naar een punt

van BA_1 loopt. Zij bevat de punten K en L en snijdt de middenstroomlijn niet.

De krommen CD_3 en BA_3 (§ 20) worden afgebeeld langs zichzelf.

III. Snelheidspotentiaal en stroomfunctie.

28. Alvorens formules te geven waardoor de grootheid w (en dus ook ϕ en ψ) in z (en dus in x en y) wordt uitgedrukt, ga ik eerst w en z beide in een daartoe geschikte hulpgrootheid uitdrukken. Hiertoe biedt zich de grootheid u aan (§ 24), bepaald door

$$u = \frac{t+p}{t+1} = \frac{e^{kw}+p}{e^{kw}+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Wij vinden hieruit onmiddellijk

$$w = \frac{1}{k}\, l\left(-\frac{p-u}{1-u}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Ter bepaling van z als functie van u hebben wij in (1) te substitueeren

$$t = -\frac{p-u}{1-u}.$$

Tevens is het nu wenschelijk een bepaalden coördinatenoorsprong aan te nemen. Ik kies daartoe het punt waar $u = 0$ is, d. i. het punt B. Wij hebben dan:

$$z = c\int_{-p}^{t} \frac{1}{t}\left(\frac{t+p}{t+1}\right)^m dt = c\int_0^u \frac{-(1-p)\,u^m du}{(1-u)(p-u)}$$

$$z = c\int_0^u \frac{u^m du}{1-u} - c\int_0^u \frac{u^m du}{p-u}$$

$$z = c\int_0^u \frac{u^m du}{1-u} - cp^m\int_0^{\frac{u}{p}} \frac{v^m dv}{1-v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Hierdoor is z uitgedrukt in het verschil van twee integralen van denzelfden vorm.

29. Is voor m de een of andere meetbare breuk gegeven, zoo kunnen bovenstaande integralen worden uitgewerkt. Ten einde echter het algemeene geval te blijven omvatten, is het noodig de functie $\int_0^u \frac{u^m du}{1-u}$ nader te behandelen.

Ontwikkelen wij $\frac{u^m}{1-u}$ naar de opklimmende of afdalende machten van u, dan vinden wij door rechtstreeksche integratie twee bijzondere waarden voor de onbepaalde integraal $\int \frac{u^m du}{1-u}$, waarvan de eene geldig is voor punten in het u-vlak binnen den convergentiecirkel mod. $u = 1$, de tweede voor punten buiten dien cirkel.

Voor deze beide reeksontwikkelingen kunnen wij schrijven $u^m K_1(u)$ en $u^m K_2(u)$, waarin door $K_1(u)$ en $K_2(u)$ — of meer volledig geschreven $K_1(m, u)$ en $K_2(m, u)$ — worden voorgesteld de reeksen

$$K_1(u) = \frac{u}{1+m} + \frac{u^2}{2+m} + \frac{u^3}{3+m} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

en

$$K_2(u) = \frac{1}{-m} + \frac{1}{(1-m)u} + \frac{1}{(2-m)u^2} + \dots \quad . \quad (15)$$

Deze beide functies K_1 en K_2 zijn éénwaardig, en bestaanbaar voor bestaanbare waarden van u. Voor punten van den convergentiecirkel mod. $u = 1$ zijn beide reeksen convergent behalve alleen voor het punt $u = 1$.

Het is duidelijk, dat $u^m K_1(u)$ nul wordt voor $u = 0$. Wij hebben dus voor mod. $u < 1$

$$\int_0^u \frac{u^m du}{1-u} = u^m K_1(u), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

en moeten nu nog een constante C zóó bepalen, dat voor alle punten buiten den convergentiecirkel

$$\int_0^u \frac{u^m du}{1-u} = C + u^m K_2(u)$$

wordt. Hiertoe substitueeren wij de waarde van u voor een

punt van den convergentiecirkel (waarvoor beide reeksen moeten doorgaan), en stellen dus $u = e^{i\omega}$. Wij moeten dan hebben

$$e^{mi\omega} K_1(e^{i\omega}) = C + e^{mi\omega} K_2(e^{i\omega}),$$

en dus

$$K_1(e^{i\omega}) - K_2(e^{i\omega}) = Ce^{-mi\omega}$$

Volbrengen wij de substitutie $u = e^{i\omega}$ in de reeksen (14) en (15), dan vinden wij

$$K_1(e^{i\omega}) - K_2(e^{i\omega}) = \frac{1}{m} - \frac{2m}{1^2 - m^2}\cos\omega - \frac{2m}{2^2 - m^2}\cos 2\omega \ldots +$$

$$+ i\left\{\frac{2 \,.\, 1}{1^2 - m^2}\sin\omega + \frac{2 \,.\, 2}{2^2 - m^2}\sin 2\omega + \ldots\right\}.$$

Wetende dat dit tot den vorm $Ce^{-mi\omega}$ *moet* kunnen worden herleid, herkennen wij in deze reeksen gemakkelijk de ontwikkeling volgens Fourier van $\dfrac{\pi}{\sin m\pi}\cos m(\pi - \omega)$ en van $\dfrac{\pi}{\sin m\pi}\sin m(\pi - \omega)$ en vinden wij dus

$$K_1(e^{i\omega}) - K_2(e^{i\omega}) = \frac{\pi}{\sin m\pi} e^{mi(\pi - \omega)},$$

waaruit volgt

$$C = \frac{\pi}{\sin m\pi} e^{m\pi i}.$$

Wij hebben dus ten slotte voor mod. $u > 1$

$$\int_0^u \frac{u^m du}{1-u} = \frac{\pi}{\sin m\pi} e^{m\pi i} + u^m K_2(u) \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

30. Substitueeren wij in (13) voor de integralen de daarvoor in (16) en (17) gevonden waarden, zoo hebben wij z voor alle gevallen volgens de machten van u ontwikkeld. Daarbij zijn drie gevallen te onderscheiden:

1°. mod. $u < p$, gebied A_3KIBA_1 (z-vlak):

$$z = cu^m \left\{K_1(u) - K_1\left(\frac{u}{p}\right)\right\}; \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

2°. $p < \text{mod. } u < 1$, gebied $A_2D_2D_3LJIKA_3$:

$$z = -\frac{c\pi p^m}{\sin m\pi} e^{m\pi i} + cu^m \left\{K_1(u) - K_2\left(\frac{u}{p}\right)\right\}, \ldots (19).$$

Letten wij op de beteekenis der letters c, p en m, dan zien wij, dat de eerste term hiervan in richting en grootte de lijn BT aangeeft, die den oorsprong B verbindt met het snijpunt van A_2D_2 en het verlengde van BC.

3°. mod. $u > 1$, gebied D_1CJLD_3:

$$z = \frac{c\pi(1-p^m)}{\sin m\pi} e^{m\pi i} + cu^m \left\{K_2(u) - K_2\left(\frac{u}{p}\right)\right\} \ldots (20).$$

De eerste term hiervan stelt in richting en grootte de lijn BC voor.

Wij kunnen met behulp van deze formules de plaats van alle merkwaardige punten in het z-vlak bepalen.

31. Ik ga thans de waarde van z in u uitgedrukt nog in een anderen vorm brengen meer geschikt tot verdere verwerking en voer daartoe ter bekorting der formules de schrijfwijze $\Xi(u)$ of meer volledig $\Xi(m, u)$ in voor de bepaalde integraal

$$\Xi(u) = \int_0^u \frac{1-u^m}{1-u} du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Ter berekening van $\Xi(u)$ hebben wij:

1°. voor het geval mod. $u < 1$:

$$\Xi(u) = -l(1-u) - u^m K_1(u),$$

2°. voor het geval mod. $u > 1$:

$$\Xi(u) = -l(1-u) - \frac{\pi}{\sin m\pi} e^{m\pi i} - u^m K_2(u)$$

of

$$\Xi(u) = -l(u-1) - \pi \cot m\pi - u^m K_2(u).$$

Deze reeksontwikkelingen zijn echter niet zeer geschikt voor waarden van u die dicht bij 1 liggen en bovendien niet van toepassing op het geval $u = 1$, waarvoor $\Xi(u)$ *niet* ∞ wordt.

Voor deze gevallen is de volgende reeks bruikbaar volgens de machten van $u - 1$:

$$\Xi(u) = \Xi(1) + \frac{m}{1} \cdot \frac{u-1}{1} - \frac{m(1-m)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(u-1)^2}{2} +$$

$$+ \frac{m(1-m)(2-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(u-1)^3}{3} - \dots\dots$$

geldig voor het geval mod. $(u-1) \leqq 1$.

Hierin moet nog de beginterm $\Xi(1)$ bekend zijn. De voorwaarde $\Xi(0) = 0$ geeft ons hiervoor de waarde

$$\Xi(1) = \frac{m}{1} + \frac{m(1-m)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{m(1-m)(2-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} + \dots,$$

van welke reeks de convergentie gemakkelijk bewijsbaar is [1]).

Bovenstaande reeks voor $\Xi(u)$ kan worden opgevat als een ontwikkeling volgens Taylor en geeft dus tevens de waarden der opeenvolgende afgeleiden voor $u = 1$.

32. De voor z gevonden formule (13) is nu te herleiden tot

$$z = -c\,l(1-u) + cp^m\,l\left(1 - \frac{u}{p}\right) - c\,\Xi(u) + cp^m\,\Xi\left(\frac{u}{p}\right). \quad (22).$$

Het ∞ worden van z voor $u = 1$ en voor $u = p$ wordt hierin uitsluitend veroorzaakt door een der beide logarithmische termen.

---

1) Iets sneller wordt de waarde van $\Xi(1)$ benaderd door de volgende reeks, waarvan ik het bewijs ter bekorting weglaat:

$$\Xi(1) = m\left\{\frac{1}{1\,(1+m)} + \frac{1}{2\,(2+m)} + \frac{1}{3\,(3+m)} + \dots\dots\right\}.$$

Nemen wij van deze reeks n termen, zoo kan van den resterm R_n bewezen worden:

$$\frac{m}{n+1} < R_n \begin{cases} < \dfrac{m}{n} \\ < \dfrac{mn+1+m}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$$

Door dus bij n termen van de reeks $\frac{m}{n+1}$ als slotterm toe te voegen wordt de overblijvende fout nog aanzienlijk verkleind.

Ten slotte kan aangaande $\Xi(1)$ nog worden opgemerkt, dat deze grootheid niets anders is dan

$$\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} + C,$$

waarin $C = 0{,}577\dots$, en dat hieruit ook bovenstaande reeksontwikkeling is af te leiden. Zie b.v. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral. t. 2, p. 180.

33. Het gelukte mij in het algemeen aan te geven hoe de snelheidspotentiaal in reeksen ontwikkelbaar is voor twee kanaalvakken, nl.:

I. voor dat deel van het kanaal dat gelegen is links van de y-as, d. i. van de loodlijn uit B op A_2D_2 neergelaten (zonder echter voor het geval $m > \frac{1}{2}$ het driehoekige stuk mee te rekenen, dat dan bij C links van die lijn komt te liggen);

II. voor dat deel van het kanaal dat gelegen is rechts van de loodlijn uit C op A_2D_2 neergelaten, of, voor het geval $m > \frac{1}{2}$ rechts van de y-as.

Voor het geval $m = \frac{1}{2}$ vormen deze beide vakken te zamen het geheele kanaal. Voor $m < \frac{1}{2}$ blijft nog een trapeziumvormig, voor $m > \frac{1}{2}$ een driehoekig stuk over.

34. Ik begin met vak I.

Het is duidelijk, dat wij ons aan dit kanaalstuk aan weerszijden, nl. aan A_1B en aan A_2E een even breed kanaal kunnen denken aan te sluiten, waarin de beweging symmetrisch is aan die in het beschouwde kanaalstuk. Dit zoo voortzettende krijgen wij een voorstelling van een vloeistofbeweging in het geheele gebied links van de ordinatenas gelegen. Wij komen tot deze zelfde voorstelling uit formule (1) door bij de integratie het passeeren van de abscissenas in het t-vlak rechts van het punt B en daarmede het rondloopen om den oorsprong naar willekeur toe te laten.

Letten wij op geen andere waarde van u dan bij de aldus beschreven beweging behoort en beperken wij ons tot waarden van z behoorende bij punten links van de ordinatenas gelegen, dan kunnen wij nu u als een periodieke functie van z beschouwen met de periode $2c\pi p^m i$.

De functie

$$s = e^{\frac{z}{cp^m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

heeft deze zelfde periode, waaruit blijkt, dat u als éénwaardige functie van s kan worden opgevat.

Formule (23) stelt een transformatie voor, waarbij het beschouwde kanaalvak vervormd wordt tot de helft van een cirkel (in een s-vlak) met het punt $s = 0$ tot middelpunt en een straal 1. Een daarmede symmetrisch stuk vloeistofoppervlakte in het z-vlak wordt vervormd tot de andere helft van den cirkel.

35. De grootheid u voldoet nu aan alle eischen om binnen dezen cirkel naar de opklimmende machten van s te kunnen worden ontwikkeld. Dat dit daarbuiten niet kan, komt doordat B ($s = 1$) een kritisch punt is.

Uit (22) vinden wij

$$s = e^{\frac{s}{cp^m}} = \left(1 - \frac{u}{p}\right)(1-u)^{-\frac{1}{p^m}} e^{-\frac{1}{p^m}\Xi(u) + \Xi\left(\frac{u}{p}\right)}. \quad (24)$$

Bij de ontwikkeling van u wordt de bekende term de waarde van u voor $s = 0$, dus p. Stellen wij verder

$$u = p + a_1 e^{\frac{s}{cp^m}} + a_2 e^{\frac{2s}{cp^m}} + \ldots\ldots \quad (25)$$

dan hebben wij volgens de formule van Bürmann

$$a_n = \frac{1}{n!} \lim_{u=p} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left\{ \frac{(u-p)^n}{\left(1 - \frac{u}{p}\right)^n} (1-u)^{\frac{n}{p^m}} e^{\frac{n}{p^m}\Xi(u) - n\,\Xi\left(\frac{u}{p}\right)} \right\}$$

of

$$a_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left\{ (-p)^n (1-u)^{\frac{n}{p^m}} e^{\frac{n}{p^m}\Xi(u) - n\,\Xi\left(\frac{u}{p}\right)} \right\} \right]_{u=p}$$

of

$$a_n = \frac{(-1)^n p}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} \left\{ (1-pv)^{\frac{n}{p^m}} e^{\frac{n}{p^m}\Xi(pv) - n\,\Xi(v)} \right\} \right]_{v=1} \ldots (26)$$

Wij hebben nu voor het beschouwde kanaalvak u in z uitgedrukt in een convergente reeks, waarvan wij de coëfficiënten zoover wij dit verlangen berekenen kunnen [1]). Deze coëfficiën-

---

[1]) De berekening der coëfficienten kan ook als volgt geschieden.

Vooreerst is $a_1 = \lim\limits_{s=0} \frac{u-p}{s}$ en dus volgens (24):

$$a_1 = -p(1-p)^{p^{-m}} e^{p^{-m}\Xi(p) - \Xi(1)}.$$

Vervolgens hebben wij volgens (23) en (13) de differentiaalvergelijking

$$\frac{1-p}{p^m}\, s\, \frac{du}{ds} = \frac{(1-u)(u-p)}{u^m} = -pu^{-m} + (1-p)u^{-m+1} - u^{-m+2}.$$

Hierin substitueerende $u = p + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots\ldots$ vinden wij de identiteit

$$(1-p)\,p^{-m}(a_1 s + 2a_2 s^2 + 3a_3 s^3 + \ldots\ldots) =$$

$$= -p(p + a_1 s + \ldots)^{-m} + (1+p)(p + a_1 s + \ldots)^{-m+1} - (p + a_1 s + \ldots)^{-m+2}.$$

De coëfficiënten van het eerste en die van het tweede lid aan elkaar gelijkstellende vinden wij a_2, a_3 enz. uitgedrukt in m, p en a_1.

Een dergelijk methode is natuurlijk ook te volgen voor kanaalvak II § 38.

ten zijn bestaanbare grootheden. Substitutie der gevonden waarde van u in (12) zou een middel zijn tot berekening van ϕ en ψ.

36. Wenschen wij w rechtstreeks in s, en dus in z, uit te drukken, dan stuiten wij op het bezwaar, dat voor $s = 0$, $w = -\infty$ wordt, zoodat de ontwikkeling van w naar de opklimmende machten van s niet mogelijk is. Wij heffen dit bezwaar op door vooraf van w, waarvoor wij volgens (12) hebben

$$w = \frac{1}{k}\{l(p) + \pi i\} + \frac{1}{k}\, l\left(1 - \frac{u}{p}\right) - \frac{1}{k}\, l(1 - u),$$

zooveel maal de in den vorm (22) gebrachte waarde van z af te trekken, dat de termen met $l\left(1 - \frac{u}{p}\right)$, waardoor in het punt $s = 0$ het oneindig worden zoowel van w als van z veroorzaakt wordt, tegen elkaar wegvallen. Wij vinden dan

$$w - \frac{z}{ckp^m} - \frac{1}{k}\{l(p) + \pi i\} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{1}{p^m} - 1\right) l(1 - u) + \frac{1}{kp^m}\,\Xi\,(u) - \frac{1}{k}\,\Xi\left(\frac{u}{p}\right) \,.. \quad (27)$$

Mechanisch komt deze bewerking hierop neer, dat wij aan de gegeven vloeistofbeweging een beweging van de geheele vloeistofmassa in de x-richting van rechts naar links hebben toegevoegd van zoodanige snelheid, dat beide bewegingen elkaar in het oneindige opheffen.

Wij kunnen nu de verkregen functie van u naar de opklimmende machten van s volgens de reeks van Bürmann ontwikkelen.

Stellen wij $s = 0$ en dus $u = p$, dan verkrijgt de functie de waarde

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{p^m} - 1\right) l\,(1 - p) + \frac{1}{kp^m}\,\Xi\,(p) - \frac{1}{k}\,\Xi\,(1).$$

Wij hebben dus:

$$w = \frac{z}{ckp^m} + \frac{1}{k}\{l\,(p) + \pi i\} + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{p^m} - 1\right) l\,(1 - p) +$$

$$+ \frac{1}{kp^m} \Xi(p) - \frac{1}{k} \Xi(1) + b_1 e^{\frac{z}{cp^m}} + b_2 e^{\frac{2z}{cp^m}} + \dots \quad (28)$$

waarin wij voor de coëfficiënten vinden:

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{u=p} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left[\left\{ \frac{1}{k(1-u)} \left(1 - \frac{u^m}{p^m}\right) - \frac{1}{kp} \cdot \frac{1 - \left(\frac{u}{p}\right)^m}{1 - \frac{u}{p}} \right\} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(u-p)^n}{\left(1 - \frac{u}{p}\right)^n} \cdot (1-u)^{\frac{n}{p^m}} e^{\frac{n}{p^m} \Xi(u) - n \Xi\left(\frac{u}{p}\right)} \right],$$

of

$$b_n = \frac{(-1)^n}{kn!} \lim_{v=1} \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} \left[\left\{ \frac{p(1-v^m)}{1-pv} - \frac{1-v^m}{1-v} \right\} \cdot (1-pv)^{\frac{n}{p^m}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot e^{\frac{n}{p^m} \Xi(pv) - n \Xi(v)} \right] \quad \dots\dots \quad (29).$$

Ik laat hierin het woord *lim.* staan om aan te wijzen, dat wij bij de substitutie $v = 1$ aan onbepaalde vormen als $\frac{1-v^m}{1-v}$ de zoogenaamde „ware" waarde moeten toekennen (d. i. hier m). Wij kunnen ook voor $\frac{1-v^m}{1-v}$ als afgeleide der Ξ-functie den vorm $\Xi'(v)$ schrijven en bij de substitutie $v = 1$ de afgeleiden der Ξ-functie bepalen op de wijze aangegeven in § 31, laatste alinea.

37. Ten slotte kunnen wij nog in beide leden van (28) het bestaanbare en het onbestaanbare scheiden, en vinden dan voor de *snelheidspotentiaal:*

$$\phi = \frac{x}{ckp^m} + \frac{1}{k} l(p) + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{p^m} - 1\right) l(1-p) + \frac{1}{kp^m} \Xi(p) -$$

$$- \frac{1}{k} \Xi(1) + b_1 e^{\frac{x}{cp^m}} \cos \frac{y}{cp^m} + b_2 e^{\frac{2x}{cp^m}} \cos \frac{2y}{cp^m} + \dots \quad (30)$$

en voor de *stroomfunctie:*

$$\psi = \frac{y}{ckp^m} + \frac{\pi}{k} + b_1 e^{\frac{x}{cp^m}} \sin \frac{y}{cp^m} + b_2 e^{\frac{2x}{cp^m}} \sin \frac{2y}{cp^m} + \ . \ (31).$$

38. Ik kom nu tot vak II van het kanaal (§ 33) en onderstel dus x positief en grooter dan $c\pi(1 - p^m) \cot m\pi$.

Evenals in § 34 beschreven werd, vormen wij ons de voorstelling van een vloeistofbeweging die het geheele aan rechts gelegen deel van het z-vlak omvat. Bij de integratie (1) in het t-vlak wordt dan het overschrijden van de abscissen-as toegelaten zoowel rechts van A als links van C.

De grootheid u is nu als periodieke functie van z op te vatten met de periode $2c\pi i$ en dus in periode overeenkomende met $e^{\frac{z}{c}}$. Wij zouden verder de redeneering van §§ 34 en 35 geheel kunnen volgen en u ontwikkelen naar de opklimmende machten van $e^{-\frac{z}{c}}$ en evenzoo w na voorafgaande aftrekking van $\frac{z}{ck}$. Doen wij dit echter, dan stuiten wij op de moeielijkheid dat de coëfficiënten der verkregen reeksen gebroken machten van een negatieve grootheid bevatten, hetgeen de splitsing van w in ϕ en ψi bezwaarlijk maakt.

Wij voorkomen dit bezwaar door te gaan ontwikkelen volgens

$$s' = e^{-\frac{z}{c} + \pi(1 - p^m) i} \quad [1]).$$

Formule (22) geeft ons

$$s' = (u - 1)\left(\frac{u}{p} - 1\right)^{-p^m} e^{\Xi(u) - p^m \Xi\left(\frac{u}{p}\right)}.$$

[1]) Dit komt op hetzelfde neer als verplaatsing van den oorsprong naar het snijpunt van CD_1 met de y-as; $e^{\frac{z}{c} - p^m \pi i}$ was even goed bruikbaar geweest maar minder in analogie met het voorafgaande.

De waarde van u voor $s' = 0$, d. i. in het oneindige aan rechts is $u = 1$. Wij vinden dus:

$$u = 1 + a'_1 e^{-\frac{z}{c} + \pi(1-p^m)i} + a'_2 e^{-\frac{2z}{c} + 2\pi(1-p^m)i} + \ldots, \quad (32)$$

waarin:

$$a'_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left\{\left(\frac{u}{p}-1\right)^{np^m} e^{-n\Xi(u) + np^m\Xi\left(\frac{u}{p}\right)}\right\}\right]_{u=1} \ldots (33)$$

39. Ter berekening van w volgen wij § 33. Slechts hebben wij te zorgen, dat uit w niet de term met $l\left(1-\frac{u}{p}\right)$ maar die met $l(1-u)$ wegvalt.

Wij vinden dan:

$$w - \frac{z}{ck} - \frac{1}{k}l(p) = \frac{p^m}{k}\pi i + \frac{1-p^m}{k}l\left(\frac{u}{p}-1\right) + \frac{1}{k}\Xi(u) - \frac{p^m}{k}\Xi\left(\frac{u}{p}\right)$$

Voor $u = 1$ wordt dit

$$\frac{p^m}{k}\pi i + \frac{1-p^m}{k}l\left(\frac{1}{p}-1\right) + \frac{1}{k}\Xi(1) - \frac{p^m}{k}\Xi\left(\frac{1}{p}\right).$$

Wij hebben dus:

$$w = \frac{z}{ck} + \frac{1}{k}l(p) + \frac{p^m}{k}\pi i + \frac{1-p^m}{k}l\left(\frac{1}{p}-1\right) + \frac{1}{k}\Xi(1) -$$

$$-\frac{p^m}{k}\Xi\left(\frac{1}{p}\right) + b'_1 e^{-\frac{z}{c} + \pi(1-p^m)i} + b'_2 e^{-\frac{2z}{c} + 2\pi(1-p^m)i} + .. (34)$$

waarin:

$$b'_n = \frac{1}{kn!}\lim_{u=1}\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left[\left\{\frac{1-u^m}{1-u} - \frac{u^m-1}{u-p}\right\}\left(\frac{u}{p}-1\right)^{np^m}\right.\cdot$$

$$\left.\cdot\, e^{-n\Xi(u) + np^m\Xi\left(\frac{u}{p}\right)}\right] \quad \ldots\ldots (35).$$

40. Bij splitsing van (34) in een bestaanbaar en een onbestaanbaar gedeelte vinden wij voor de *snelheidspotentiaal*:

$$\phi = \frac{x}{ck} + \frac{1}{k}\, l\,(p) + \frac{1-p^m}{k}\, l\left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{1}{k}\,\Xi(1) - \frac{p^m}{k}\,\Xi\left(\frac{1}{p}\right) +$$

$$+ b'_1\, e^{-\frac{x}{c}} \cos\left\{-\frac{y}{c} + \pi(1-p^m)\right\} + b'_2\, e^{-\frac{2x}{c}} \cos\left\{-\frac{2y}{c} + 2\pi(1-p^m)\right\} + \ldots (36)$$

en voor de *stroomfunctie*:

$$\psi = \frac{y}{ck} + \frac{p^m \pi}{k} + b'_1\; e^{-\frac{x}{c}} \sin\left\{-\frac{y}{c} + \pi\,(1-p^m)\right\} +$$

$$+ b'_2\; e^{-\frac{2x}{c}} \sin\left\{-\frac{2y}{c} + 2\pi\,(1-p^m)\right\} + \ldots\ldots (37)$$

IV. Het geval $m = \frac{1}{2}$.

41. Formule (13) wordt voor dit geval

$$z = c\int_0^u \frac{\sqrt{u}\,.\,du}{1-u} - c\sqrt{p}\int_0^{\frac{u}{p}} \frac{\sqrt{v}\,.\,dv}{1-v},$$

en dus

$$z = c\left\{l\,\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}} - \sqrt{p}\,.\,l\,\frac{1+\sqrt{\frac{u}{p}}}{1-\sqrt{\frac{u}{p}}}\right\},$$

of

$$z = c\,l\left\{\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}\,.\left(\frac{1-\sqrt{\frac{u}{p}}}{1+\sqrt{\frac{u}{p}}}\right)^{\sqrt{p}}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

waardoor de reeksontwikkelingen (18), (19) en (20) overbodig zijn.

Verder hebben wij:

$$\Xi(u) = \int_0^u \frac{1-\sqrt{u}}{1-u}\,du = \int_0^u \frac{du}{1+\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} - 2l(1+\sqrt{u}) \quad (39)$$

42. Beschouwen wij nu eerst het linksche kanaalvak, dan vinden wij hiervoor volgens (30):

$$\phi = \frac{x}{ck\sqrt{p}} + \frac{1}{k} l(p) + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} - 1\right) l(1-p) - \frac{2}{k\sqrt{p}} l(1+\sqrt{p}) +$$

$$+ \frac{2}{k} l(2) + b_1 e^{\frac{x}{c\sqrt{p}}} \cos\frac{y}{c\sqrt{p}} + b_2 e^{\frac{2x}{c\sqrt{p}}} \cos\frac{2y}{c\sqrt{p}} + \ldots, \quad (40)$$

en volgens (31):

$$\psi = \frac{y}{ck\sqrt{p}} + \frac{\pi}{k} + b_1 e^{\frac{x}{c\sqrt{p}}} \sin\frac{y}{c\sqrt{p}} + b_2 e^{\frac{2x}{c\sqrt{p}}} \sin\frac{2y}{c\sqrt{p}} + \ldots, \quad (41)$$

waarin wij ons gesubstitueerd moeten denken volgens (29):

$$b_n = \frac{(-1)^n}{kn!}\left[\frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}}\left\{\left(\frac{p(1-\sqrt{v})}{1-pv} - \frac{1}{1+\sqrt{v}}\right)(1+\sqrt{v})^{2n}\left(\frac{1-\sqrt{pv}}{1+\sqrt{pv}}\right)^{\frac{n}{\sqrt{p}}}\right\}\right]_{v=1} \ldots($$

Men zal vinden:

$$b_1 = \frac{2}{k}\left(\frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{p}}};$$

$$b_2 = \frac{5-p}{k(1-p)}\left(\frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{p}}} \text{ enz.}$$

43. Voor het andere kanaalgedeelte hebben wij volgens (36):

$$\phi = \frac{x}{ck} + \frac{1}{k} l(p) + \frac{1-\sqrt{p}}{k} l\left(\frac{1}{p} - 1\right) +$$

$$+ \frac{2\sqrt{p}}{k} l\left(1 + \sqrt{\frac{1}{p}}\right) - \frac{2}{k} l(2) + b'_1 e^{-\frac{x}{c}} \cos\left\{-\frac{y}{c} + \pi(1-\sqrt{p})\right\} +$$

$$+ b'_2 e^{-\frac{2x}{c}} \cos\left\{-\frac{2y}{c} + 2\pi(1-\sqrt{p})\right\} + \ldots \quad . \quad (43)$$

en volgens (37):

$$\psi = \frac{y}{ck} + \frac{\pi\sqrt{p}}{k} + b'_1 e^{-\frac{x}{c}} \sin\left\{-\frac{y}{c} + \pi(1-\sqrt{p})\right\} +$$

$$+ b'_2 e^{-\frac{2x}{c}} \sin\left\{-\frac{2y}{c} + 2\pi(1-\sqrt{p})\right\} + \ldots, \quad . \quad (44)$$

waarin volgens (35):

$$\frac{1}{kn!}\left[\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left\{\left(\frac{1}{1+\sqrt{u}}-\frac{\sqrt{u}-1}{u-p}\right)(1+\sqrt{u})^{2n}\left(\frac{\sqrt{u}-\sqrt{p}}{\sqrt{u}+\sqrt{p}}\right)^{n\sqrt{p}}\right\}\right]_{u=1} \quad (45).$$

Men zal vinden:

$$b'_1 = \frac{2}{k}\left(\frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}\right)^{\sqrt{p}};$$

$$b'_2 = \frac{5p-1}{k(1-p)}\left(\frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}\right)^{2\sqrt{p}}; \quad \text{enz.}$$

44. De formule door LAMB voor dit geval gegeven (door dezen aan C. NIVEN ontleend) wordt opgegeven geldig te zijn alleen voor dit laatste gedeelte van het kanaal. Wij hebben dus haar juistheid te toetsen aan formule (43). Daarbij hebben wij nog te bedenken, dat voor LAMB's formule een andere oorsprong werd gekozen, nl. het punt C, en een ander nulpunt van potentiaal. Dit laatste is nl. zoo gekozen, dat de gemiddelde potentiaal in de y-as 0 is.

Deze zelfde bijzonderheden in formule (43) invoerende, gaat zij over in:

$$\phi = \frac{x}{ck} + \frac{2}{k}\left(\frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}\right)^{\sqrt{p}} e^{-\frac{x}{c}} \cos\frac{y}{c} +$$
$$+ \frac{5p-1}{k(1-p)}\left(\frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}\right)^{2\sqrt{p}} e^{-\frac{2x}{c}} \cos\frac{2y}{c} + \ldots$$

(voor b_1' en b_2' voer ik hier hun waarden in).

Drukken wij nu in LAMB's formule a, b en U in c, k en p uit, zoo gaat deze over in:

$$\phi = \frac{x}{ck} + \frac{2}{k\pi\sqrt{p}} \sin\{\pi(1-\sqrt{p})\}\, e^{-\frac{x}{c}} \cos\frac{y}{c} +$$
$$+ \frac{2}{4k\pi\sqrt{p}} \sin\{2\pi(1-\sqrt{p})\}\, e^{-\frac{2x}{c}} \cos\frac{2y}{c} + \ldots$$

Het is echter duidelijk, dat de ontwikkeling van ϕ volgens termen met $e^{-\frac{nx}{c}} \cos\frac{ny}{c}$ (overeenkomende met de ontwikkeling van $w - \frac{z}{ck}$ naar de opklimmende machten van $e^{-\frac{z}{c}}$) niet op

meer dan één wijze kan geschieden, zoodat uit het niet overeenkomen der eerste coëfficiënten de onjuistheid van een der beide formules voldoende blijkt.

45. Ik zal echter nog nader doen zien, dat Lamb's formule niet juist kan zijn, en daarbij tevens den foutieven grondslag aanwijzen waarop zij vermoedelijk berust.

Ik bereken daartoe de stroomfunctie die bij de door Lamb gegeven snelheidspotentiaal behoort. Daarvoor zal men vinden:

$$\psi = \frac{a-b}{a} Uy - \frac{2aU}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi b}{a} e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin\frac{n\pi y}{a}.$$

Wij zien nu, dat de lijnen CD_1 en TD_2 ook bij deze vloeistofbeweging naar behooren stroomlijnen zijn, terwijl ook de beweging in het oneindige tot een gelijkmatige beweging met snelheid $\frac{a-b}{a}$ U nadert.

Stellen wij $x = 0$ om te onderzoeken wat de stroomfunctie wordt in punten der lijn TC [1]), dan vinden wij:

$$\psi = \frac{a-b}{a} Uy - \frac{2aU}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi b}{a} \sin\frac{n\pi y}{a}.$$

Hierin blijkt de tweede term de ontwikkeling volgens een sinusreeks van Fourier voor te stellen van een periodieke functie met periode $2a$, die van $-a$ tot $-b$ wordt voorgesteld door:

$$F(y) = \frac{b}{a} U(a+y),$$

van $-b$ tot $+b$ door:

$$F(y) = -\frac{a-b}{a} Uy,$$

van b tot a door:

$$F(y) = -\frac{b}{a} U(a-y).$$

---

[1]) Ik blijf hier C als oorsprong, CD_1 als x-as gebruiken. De onderstelling $\alpha = 90°$ maakt dat CT het negatieve deel der y-as wordt. Door letters met accenten, B′, T′ enz., zal ik de met B, T enz. overeenkomstige punten in de andere kanaalhelft aanwijzen (hun symmetrische punten ten opzichte van CD_1).

Wij hebben dus voor de stroomfunctie: van $-a$ tot $-b$, d. i. van T tot B:

$$\psi = (y + b)U,$$

van $-b$ tot $+b$, d. i. van B tot B′:

$$\psi = 0,$$

van b tot a, d. i. van B′ tot T′:

$$\psi = (y - b)U.$$

46. Hieruit zien wij, dat de stroomfunctie gelijkmatig toeneemt van T tot B, en van B tot C (naar behooren) constant blijft.

De onderstelling bij het opstellen der formule moet dus geweest zijn, dat alle elementen van de lijnen TB en T′B′ evenredig aan hun lengte vloeistof zenden in het kanaalvak $D_2TT'D_2'$. Dat deze onderstelling foutief is, is uit het beloop der stroomlijnen links van BT onmiddellijk duidelijk. Uit den zin waarin deze gekromd zijn (§ 16) blijkt nl., dat de stroomfunctie in de nabijheid van T minder sterk zal toenemen dan dichter bij B, en dat dus b.v. de middenstroomlijn de lijn BT niet midden tusschen B en T maar dichter bij B zal snijden.

Slechts als wij aannemen, dat de beweging aan links niet alleen in het oneindige gelijkmatig is, maar ook tot aan de lijn BT toe gelijkmatig blijft, zou de stroomfunctie in de lijn BT de eigenschappen verkrijgen die wij haar volgens Lamb's formule moeten toekennen.

De opmerking in het vraagstuk voorkomende „the bridge [1]) being so broad that under it the fluid moves uniformly with velocity U" zou er misschien op wijzen, dat de opsteller daarvan werkelijk van deze zonderlinge onderstelling is uitgegaan.

---

[1]) De pier $A_1BB'A_1'$ wordt hier n.l. opgevat als een pijler waarop een brug rust.

DE VERGELIJKINGEN VOOR DE INDEELING DER STANGENVIERHOEKEN,

DOOR

F. J. VAES.
(Rotterdam.)

1. Bij de door Schrijver gegeven indeeling van de stange vierhoeken (Jaarverslag XXXVIII van 22 Maart 1899 van Vereeniging van Werktuig- en Scheepsbouwkundigen en Jaa verslag III van de Vakafdeeling voor W. en S. van het Ko Inst. v. Ing.) werden de volgende bijzondere betrekkinge aangegeven tusschen de steunpuntenlijn d, de krukken R en en de koppelstang l:

$$l = R + d + r \; (1), \quad d = l + R + r \; (2), \quad R = d + r + l \; (3),$$
$$r = l + R + d \; (4);$$
$$l + R = d + r \; (5), \quad l + r = R + d \; (6), \quad l + d = R + r \; (7);$$
$$l = d \; (8), \quad d = R \; (9), \quad R = l \; (10);$$
$$l = r \; (11), \quad d = r \; (12), \quad R = r \; (13).$$

Deze vergelijkingen werden opgesteld door waarneming.

2. In het volgende zal blijken, dat zij af te leiden zijn een meer eenvoudig waarnemingsresultaat, namelijk dat r, R en l hoeken θ, ϕ en ψ maken met d:

$$l \cos \psi + R \cos \phi + r \cos \theta = d,$$

en

$$l \sin \psi + R \sin \phi = r \sin \theta,$$

de bekende vergelijkingen voor het gesloten zijn van den vierho

Noemt men $\cos \psi = x$, $\cos \phi = y$, $\cos \theta = z$, dan wordt eerste vergelijking:

$$lx + Ry + rz = d,$$

een plat vlak, dat van de drie positieve assen stukken afsn

omgekeerd evenredig met l, R en r, en de tweede vergelijking

$$l\sqrt{1-x^2} + R\sqrt{1-y^2} = r\sqrt{1-z^2},$$

dus een oppervlak, dat door het platte vlak gesneden wordt volgens een kromme lijn, waarvan elk punt overeenkomt met een *stand* van den stangenvierhoek.

3. Voor verschillende verhoudingen der stangen verkrijgt men verschillende krommen, die echter niet op eenzelfde oppervlak liggen.

Buiten den kubus, begrensd door de vlakken

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1, \quad z = \pm 1,$$

kunnen geen reëele punten aanwezig zijn, en dus zal bij een bestaanbaren stangenvierhoek het overeenkomstige platte vlak dien kubus moeten snijden.

Het spreekt vanzelf dat een vlak, dat den kubus snijdt, slechts dan een bestaanbaren stangenvierhoek kan geven, als het de drie positieve assen snijdt.

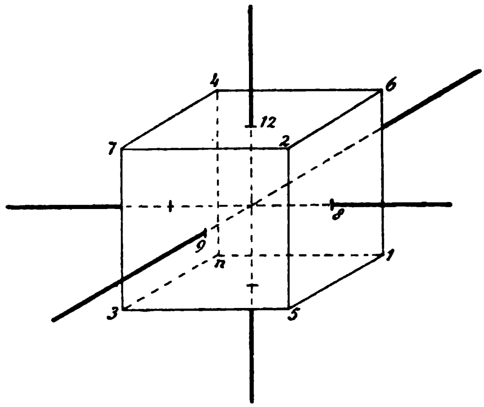
4. Doet men de stangen l, R en r van een stangenvierhoek evenredig toe- of afnemen, dan zal telkens als het vlak door een der hoekpunten van den kubus gaat, een bijzondere betrekking tusschen de vier stangen bestaan.

Voor een vlak gaande door het hoekpunt van den kubus waarvoor:

x	y	z	heeft men de betrekking:
1	1	1	$d = l + R + r$ (2)
1	-1	-1	$l = R + d + r$ (1)
-1	1	-1	$R = d + l + r$ (3)
-1	-1	1	$r = l + R + d$ (4)
1	1	-1	$d - l = R - r$ of $l + R = d + r$ (5)
1	-1	1	$l - d = R - r$ of $l + r = d + R$ (6)
-1	1	1	$l + d = R + r$ (7)
-1	-1	-1	$d + l + R + r = 0$ (n)

De laatste dezer betrekkingen vereischt, dat alle stangen een lengte nul hebben, terwijl de andere de eerste zeven in den aanvang genoemde vergelijkingen zijn.

5. Schrijft men bij de hoekpunten van den kubus (fig. 1) de nummers van de betrekkingen waartoe zij aanleiding geven, dan blijkt dat van de groepen 1, 2, 3, 4 en 5, 6, 7, *n* geen



twee op eenzelfde ribbe liggen. De eerste groep geeft betrekkingen, waarbij de stangenvierhoek onbewegelijk is, de tweede groep die, waarbij de vierhoek is samengevouwen.

6. Voor een vlak gaande door het punt waarvoor:

x	y	z	heeft men de betrekking:
1	0	0	$l = d$ (8)
0	1	0	$\mathrm{R} = d$ (9)
0	0	1	$r = d$ (12)

Deze betrekkingen behooren bij de middelpunten der drie zijvlakken van den kubus, welke in het hoekpunt 2 samenkomen.

Voor een vlak loodrecht op het vlak:	is:
$x = y$	$\mathrm{R} = l$ (10)
$x = z$	$l = r$ (11)
$y = z$	$r = \mathrm{R}$ (13)

7. Alle eigenschappen van de stangenvierhoeken de beweging betreffende, zijn met behulp van den kubus af te leiden.

Bijvoorbeeld: Als een vlak den kubus snijdt, zoodanig dat het punt 2 aan de eene zijde van het vlak ligt, en de zeven

andere hoekpunten aan de andere zijde, dan kunnen x, y en z wel $+1$ worden, maar niet -1. Dus R en r kunnen wel komen op d, maar niet in het verlengde van d, terwijl l slechts evenwijdig kan zijn met d in dezelfde richting. R en r oscilleeren dus aan de binnenzijde.

Gemakshalve zou men kunnen zeggen, dat door zulk een vlak het hoekpunt 2 wordt afgesneden.

Een vlak dat de punten 2 en 7 afsnijdt, geeft een stangenvierhoek, waarbij l geheel ronddraait, terwijl R en r oscilleeren aan de binnenzijde.

8. Verschillende gevallen die zich voordoen, zijn in de volgende tabel opgenomen. Zij komen geheel overeen met de in de Jaarverslagen aangegevene. Sommigen geven dezelfde mechanismen; er is dan dit onderscheid, dat bij het eene geval de mechanismen hun mogelijke beweging geheel volbrengen, terwijl zij in het andere geval op hun doode punten terugkeeren.

Als l volgens den stand van het snijdende vlak ten opzichte van den kubus evenwijdig met d kan zijn, zoowel in dezelfde als in tegengestelde richting, dan kan dit beteekenen, dat l zoowel boven als onder de steunpuntenlijn evenwijdig met deze kan komen, òf wel dat l geheel ronddraait. In de laatste kolom is dit aangegeven.

Afgesn. hoekpunt.	R	r	l
2	oscilleert binnen.	osc. bn.	wordt // met d gelijk gericht.
2 en 5	„ „	roteert.	evenw. gel. ger.
2 en 7	„ „	osc. bn.	// gel. en tegengesteld ger.; kan roteeren.
2, 5 en 7	„ „	roteert.	// gel. en teg. ger.
2, 5, 7 en 3	osc. over een boog aan de binnenzijde.	„	// gel. en teg. ger.
2, 5 en 6	roteert.	„	evenw. gel. ger.
2, 5, 6 en 1	„	„	niet evenw.
2, 5, 6 en 7	osc. bn.	„	roteert.
2, 5, 6, 7 en 3	osc. over een boog aan de buitenzijde.	„	// gel. en teg. ger.
2, 5, 6, 7 en 1	roteert.	„	evenw. teg. ger.
2, 5, 6, 7, 1 en 3	osc. bg. bt.	„	evenw. teg. ger.

2, 4, 5, 6, 7 en 3	osc. buiten	osc. bt.	// gel. en teg. ger.
2, 4, 5, 6, 7, 3 en 1	„	„	evenw. teg. ger.

Hierbij is ondersteld, dat R $> r$ is, zoodat 6 niet kan worden afgesneden zonder 5, of 4 zonder 3.

9. Als de grootste der krukken oneindig lang wordt gedacht, dan is ook een der aangrenzende stangen oneindig lang, en men heeft dus $R = \infty$ en $d = \infty$, of $R = \infty$ en $l = \infty$. (Zie het genoemde Jaarverslag, Tabel III, en Fig. 12, Bijlage I). Elk van die beide gevallen kan behandeld worden zooals de gewone vierhoek in het voorgaande.

10. $R = \infty$ en $d = \infty$. Wordt het eindige verschil van die stangen d' genoemd, dan worden

vergelijkingen (2) en (3) van § 1: $d' = l + r$ (1),

„ (5) en (7) „ „: $d' = l - r$ (2) of $d' = r - l$ (3),

„ (9) „ „: $d' = 0$ (4).

Verg. (11) blijft: $l = r$ (5),

terwijl verg. (1), (4), (6), (8), (10), (12) en (13) vervallen, en daartegen de betrekkingen $l = d'$ (6), en $r = d'$ (7) optreden.

De nieuwe vergelijkingen (1) tot (7) moeten kunnen worden afgeleid op analoge wijze als de vergelijkingen van § 1.

Door projectie op d' vindt men:

$$l \cos \phi + r \cos \theta = d',$$

welke vergelijking voldoende is om den stand van het mechanisme te bepalen.

Noemt men weer $\cos \phi = x$, $\cos \theta = y$, dan is

$$lx + ry = d'$$

een rechte lijn, waarvan elk punt overeenkomt met een *stand* van het mechanisme, en die van de positieve assen stukken afsnijdt, omgekeerd evenredig met l en r.

Voor verschillende verhoudingen van l en r verkrijgt men verschillende rechten, waarvan echter de punten, die buiten het vierkant vallen, dat door de lijnen $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ begrensd wordt, geen bestaanbare standen geven.

Elke lijn moet van de assen positieve stukken afsnijden om met een bestaanbaar mechanisme overeen te komen.

11. Doet men de stangen l en r van een mechanisme evenredig toe of afnemen, dan zal telkens als de lijn door een der hoekpunten van het vierkant gaat, een bijzondere betrekking tusschen l, r en d' bestaan.

Voor een lijn gaande door het hoekpunt

x	y	heeft men de betrekking:
1	1	$d' = l + r$ (1)
1	-1	$d' = l - r$ (2)
-1	1	$d' = r - l$ (3)
-1	-1	$d' + r + l = 0$ (n), (dus $d'=0, l=0, r=0$).

12. Schrijft men bij de hoekpunten van het vierkant de nummers van de betrekkingen, waartoe zij aanleiding geven, dan blijkt, dat (1) en (n) tegenover elkander liggen, en dus evenzoo (2) en (3). De eerstgenoemden geven de betrekkingen aan, waarbij het mechanisme onbewegelijk is, de anderen die, waarbij l, r en d' in éen lijn kunnen liggen (wat overeenkomt met het samengevouwen zijn van den vierhoek l, R, r, d).

13. Voor een lijn gaande door het punt:

x	y	heeft men de betrekking:
1	0	$l = d'$ (6),
0	1	$r = d'$ (7),

en voor een lijn, loodrecht op de lijn $x = y$:

$$l = r \quad (5).$$

14. Wordt een lijn zóo getrokken, dat ze alleen het hoekpunt (1) van het vierkant afsnijdt, dan kunnen x en y, d. w. z. $\cos\phi$ en $\cos\theta$, wel $+1$ worden, maar niet -1. Dus kan r wel op d' vallen, maar niet in het verlengde van d', en kan l wel evenwijdig met d' worden in dezelfde richting, maar niet in tegengestelde richting.

Alzoo beweegt r over de steunpuntenlijn heen, en oscilleert aan de binnenzijde.

Bovendien kan $\cos\phi = 0$, of $\cos\theta = 0$, of kunnen beide tegelijk nul zijn (al naarmate de lijn binnen het vierkant een van beide, of beide assen snijdt), zoodat dan $r \perp d'$, of $l \perp d'$ kan komen te staan, of wel achtereenvolgens beide $\perp d'$ kunnen komen. Stang l is $\perp d'$, als l langs de leibaan valt.

15. Een lijn die de punten 1 en 2 afsnijdt geeft een mechanisme, waarbij $\cos\phi$ de waarde $+1$ of -1 niet kan bereiken, terwijl $\cos\theta$ zoowel $+1$ als -1 kan worden. Dus kan r geheel ronddraaien, terwijl l niet $\parallel d'$ kan worden.

Een lijn, die de punten 1 en 3 afsnijdt geeft een mechanisme waarbij r over een boog oscilleert aan eene zijde van de steunpuntenlijn gelegen, terwijl l evenwijdig aan d' kan zijn, zoowel in dezelfde als in tegengestelde richting.

16. Voor de mechanismen, waarbij $R = \infty$ en $l = \infty$ gelden analoge beschouwingen. Noemt men het eindig verschil der stangen l', dan heeft men de vergelijkingen:

$$l' = d + r \ (1), \quad l' = d - r \ (2), \quad l' = r - d \ (3), \quad l' = 0 \ (4);$$
$$d = r \ (5), \ d = l' \ (6) \text{ en } r = l' \ (7),$$

welke ook uit de vergelijking:

$$d \cos\phi + r \cos\theta = l', \text{ of } dx + ry = l',$$

met behulp van een vierkant zijn af te leiden.

17. Hoe langer het stuk is van een lijn, dat binnen het vierkant valt, des te meer standen kan het mechanisme achtereenvolgens innemen, en des te grooter is de *bewegelijkheid* van het stelsel. (Vergelijk het genoemde Jaarverslag.)

Men zou dus kunnen zeggen, dat lijnen van dezelfde lengte binnen het vierkant behooren bij mechanismen met gelijke bewegelijkheid. De lengte van het stuk zou als *maat* kunnen dienen voor de bewegelijkheid.

Bij den vierhoek met eindige stangen zou men de omtrekken van de kromlijnige doorsneden binnen den kubus moeten berekenen om twee mechanismen met elkander te kunnen vergelijken voor wat betreft den graad hunner bewegelijkheid.

ONTWIKKELINGSCOËFFICIËNTEN, DIE EENIGE OVEREENKOMST MET DE GETALLEN VAN BERNOULLI VERTOONEN,

DOOR

J. C. KLUYVER.
(Leiden.)

Wanneer de breuk

$$\frac{e^{\theta x}-1}{e^x-1}$$

naar opklimmende machten van x wordt ontwikkeld, is de coëfficiënt van x^k de k^{de} functie van Bernoulli

$$f_k(\theta)=\frac{\theta^{k+1}}{(k+1)!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^k}{k!}+\frac{B_1}{2!}\cdot\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}-\frac{B_2}{4!}\cdot\frac{\theta^{k-3}}{(k-3)!}+\dots$$

Dientengevolge is

$$\frac{xe^{\theta x}}{e^x-1}=1+\sum_1^\infty f'_k(\theta)x^k$$

en heeft men voor $\theta=a:b$, $x=by$,

$$\frac{by\,e^{ay}}{e^{by}-1}=1+\sum_1^\infty b^k f'_k\left(\frac{a}{b}\right)y^k=1+\sum_1^\infty C_k\left(\frac{a}{b}\right)\frac{y^k}{k!}.$$

Voor $a=0$, $b=1$ gaan de in deze ontwikkeling voorkomende getallencoëfficiënten C_k van even rangnummer, wat hunne volstrekte waarde betreft, over in de getallen van Bernoulli; wij willen nu aantoonen dat men, wanneer a en b voorstellen onderling ondeelbare geheele getallen, het gebroken gedeelte der getallen C_k op eenvoudige wijze kan bepalen; m. a. w., dat de stelling door Staudt en Clausen aangaande de getallen van Bernoulli bewezen, met eene kleine verandering voor de coëfficiënten C_k van kracht blijft.

Uit de definitie van C_k,

$$C_k\left(\frac{a}{b}\right) = D^k_{y=0}\,\frac{by\,e^{ay}}{e^{by}-1},$$

volgt

$$C_k\left(\frac{a}{b}\right) = -\,D^k_{y=0}\,\frac{e^{ay}}{1-e^{by}}\log\left[1-(1-e^{by})\right] =$$

$$= \sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{1}{h}\,D^k_{y=0}\,e^{ay}\,(1-e^{by})^{h-1}.$$

De reeks in het laatste lid herleidt zich blijkbaar tot de som der $k+1$ eerste termen. Men heeft

$$C_k\left(\frac{a}{b}\right) = \sum_{h=1}^{h=k+1}\frac{1}{h}\,D^k_{y=0}\,e^{ay}\,(1-e^{by})^{h-1} = \sum_{h=1}^{h=k+1}\frac{1}{h}\,T_h$$

en C_k is voorgesteld als de som van $k+1$ gebroken getallen met de noemers $1, 2, 3, \ldots k+1$.

In de eerste plaats kan men nu inzien, dat het getal $\frac{1}{h}T_h$ geheel is, wanneer h deelbaar is. Stel $h = \lambda + \mu$, dan is $\lambda + \mu < h - 1$ (uitgezonderd voor $h = 4$) en men heeft

$$\frac{1}{h}T_h = \frac{1}{h}D^k_{y=0}\,(1-e^{by})^\lambda \times (1-e^{by})^\mu \times \{e^{ay}(1-e^{by})^{h-1-\lambda-\mu}\}.$$

Om de termen in de uitkomst der differentiatie te vinden, die niet nul worden, wanneer men $y = 0$ stelt, moeten de beide eerste factoren van het product elk minstens ééns gedifferentiëerd geweest zijn, en deze bewerking levert onmiddellijk den factor $\lambda\mu$, welke den noemer h doet wegvallen.

Duidt men dus door $A \equiv B$ aan, dat het verschil $A - B$ een geheel getal is, dan volgt hieruit

$$\frac{1}{h}T_h \equiv 0 \quad (h \text{ deelbaar}, > 4).$$

De termen $\frac{1}{2}T_2$ en $\frac{1}{4}T_4$ worden afzonderlijk onderzocht.

Uit

$$\tfrac{1}{2}T_2 = \tfrac{1}{2}\{a^k - (a+b)^k\}$$

volgt dadelijk

$$\tfrac{1}{2}T_2 \equiv \tfrac{1}{2}b.$$

Voor $h = 4$ heeft men

$$\tfrac{1}{4}\mathrm{T}_4 = \tfrac{1}{4}\{a^k - 3(a+b)^k + 3(a+2b)^k - (a+3b)^k\}$$
$$\equiv \tfrac{1}{4}\{a^k + (a+b)^k - (a+2b)^k - (a+3b)^k\}$$
$$\equiv -\tfrac{1}{2}kb\{a^{k-1} + (a+b)^{k-1}\}.$$

Derhalve is voor even a en oneven waarden van k en van b

$$\tfrac{1}{4}\mathrm{T}_4 \equiv \tfrac{1}{2},$$

in alle andere gevallen is de term geheel.

Het gezochte gebroken gedeelte van C_k komt dus in hoofdzaak voort uit die termen, wier ranggetal h een priemgetal is.

Wij stellen

$$k = \rho(h-1) + \alpha. \qquad (\alpha < h-1).$$

Naast

$$\frac{1}{h}\mathrm{T}_h = \frac{1}{h}\mathrm{D}^k_{y=0}\, e^{ay}(1 - e^{by})^{h-1},$$

geldt ook blijkbaar

$$0 = \frac{1}{h}\mathrm{D}^\alpha_{y=0}\, e^{ay}(1 - e^{by})^{h-1},$$

zoodat men door aftrekking vindt

$$\frac{1}{h}\mathrm{T}_h = \frac{1}{h}[a^\alpha\{a^{\rho(h-1)} - 1\} - (h-1)_1(a+b)^\alpha\{(a+b)^{\rho(h-1)} - 1\} +$$
$$+ (h-1)_2(a+2b)^\alpha\{(a+2b)^{\rho(h-1)} - 1\} + \ldots +$$
$$+ (a+\overline{h-1}b)^\alpha\{(a+\overline{h-1}b)^{\rho(h-1)} - 1\}].$$

Aangezien men voor h ondeelbaar heeft

$$\frac{(-1)^n}{h}(h-1)_n \equiv \frac{1}{h},$$

kan men eindelijk schrijven

$$\frac{1}{h}\mathrm{T}_h \equiv \frac{1}{h}[a^\alpha\{a^{\rho(h-1)} - 1\} + (a+b)^\alpha\{(a+b)^{\rho(h-1)} - 1\} +$$
$$+(a+2b)^\alpha\{(a+2b)^{\rho(h-1)}-1\}+\ldots+(a+\overline{h-1}b)^\alpha\{(a+\overline{h-1}b)^{\rho(h-1)}-1\}.$$

Twee gevallen zijn nu te onderscheiden. Ten eerste nemen wij aan, dat in $k = \rho(h-1) + \alpha$ de rest α niet nul is, wanneer $h-1$ op k wordt gedeeld. Thans is voor alle waarden van n

$$(a+nb)^\alpha\{(a+nb)^{\rho(h-1)} - 1\}$$

door h deelbaar en er volgt

$$\frac{1}{h}T_k \equiv 0 \quad (h \text{ ondeelbaar} > 2,\ h-1 \text{ niet deelbaar op } k).$$

In de tweede plaats kan $\alpha = 0$ en $k = \rho(h-1)$ zijn. Alsdan kan nog

$$\frac{1}{h}T_k \equiv \frac{1}{h}\left[\{a^{\rho(h-1)} - 1\} + \{(a+b)^{\rho(h-1)} - 1\} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \{(a+\overline{h-1}b)^{\rho(h-1)} - 1\right]\}$$

geheel zijn, zoo slechts h is een deeler van b en dus geen deeler van een der getallen a, $a+b$, $a+2b$, ... Is echter h niet deelbaar op b, dan bevat één en niet meer dan één der getallen a, $a+b$, $a+2b$, ... den factor h. In dat geval heeft men dus

$$\frac{1}{h}T_k \equiv -\frac{1}{h}. \quad (h \text{ ondeelbaar} > 2,\ h-1 \text{ deelbaar op } k,\ h \text{ niet deelbaar op } b).$$

Alles te zamen nemende is er ten aanzien van de ontwikkeling

$$\frac{by\, e^{ay}}{e^{by}-1} = 1 + \sum_1^\infty C_k\left(\frac{a}{b}\right)\frac{y^k}{k!}$$

bewezen:

Wanneer a en b onderling ondeelbare geheele getallen voorstellen, zijn de coëfficiënten van oneven rangnummer $C_{2m+1}\left(\frac{a}{b}\right)$ geheel ($m > 0$). Het gebroken gedeelte van den coëfficiënt van even rangnummer $C_{2m}\left(\frac{a}{b}\right)$ is gelijk aan

$$-\Sigma\frac{1}{h},$$

waarin h achtereenvolgens aangeeft de priemgetallen niet deelbaar op b en van dien aard, dat $h-1$ deelbaar is op $2m$[1]).

Eene uitzondering levert de eerste coëfficiënt. Men heeft

$$C_1\left(\frac{a}{b}\right) \equiv \tfrac{1}{2}b.$$

---

[1]) Voor oneven b is 2 het eerste der bedoelde priemgetallen.

De voorafgaande stelling is blijkbaar eene uitbreiding van de bekende eigenschap der getallen van Bernoulli, die door Staudt en door Clausen werd gevonden. Voor $a = 0$, $b = 1$ wordt

$$C_{2m}(0) = (-1)^{m-1} B_m$$

en men vindt

$$B_m \equiv (-1)^m \left(\frac{1}{2} + \Sigma \frac{1}{h}\right),$$

waarbij de som nu betrekking heeft op alle priemgetallen > 2, die voldoen aan de voorwaarde, dat $h - 1$ deelbaar is op $2m$.

Uit het voorafgaande zijn nog eenige verdere gevolgtrekkingen te maken. De beide vergelijkingen

$$\frac{by\, e^{ay}}{e^{by} - 1} = 1 + \sum_1^\infty C_k\left(\frac{a}{b}\right)\frac{y^k}{k!},$$

$$\frac{by\, e^{a_1 y}}{e^{by} - 1} = 1 + \sum_1^\infty C_k\left(\frac{a_1}{b}\right)\frac{y^k}{k!}$$

geven na eenige herleiding

$$b\frac{e^{ay} - e^{a_1 y}}{e^{by} - 1} = (a - a_1) + \sum_1^\infty \frac{C_{k+1}\left(\frac{a}{b}\right) - C_{k+1}\left(\frac{a_1}{b}\right)}{(k+1)} \times \frac{y^k}{k!},$$

en daar volgens de bewezen stelling

$$C_{k+1}\left(\frac{a}{b}\right) \equiv C_{k+1}\left(\frac{a_1}{b}\right),$$

besluit men, dat in de ontwikkeling

$$b\frac{e^{ay} - e^{a_1 y}}{e^{by} - 1} = (a - a_1) + \sum_1^\infty g_k \frac{y^k}{k!}$$

de coëfficiënt g_k na vermenigvuldiging met $k + 1$ een geheel getal moet opleveren. Ten aanzien dezer coëfficiënten g_k is nog iets anders te vinden. Men heeft

$$g_k = b D^k_{y=0} \frac{e^{ay} - e^{a_1 y}}{e^{by} - 1} = b D^k_{y=0} \frac{e^{a_1 y} + e^{(a_1+1)y} + \ldots e^{(a-1)y}}{1 + e^y + e^{2y} + \ldots e^{(b-1)y}}$$

en daaruit volgt

$$g_k = \frac{A_k}{b^k},$$

waarin A_k een geheel getal beteekent.

Op deze wijze is ten aanzien der ontwikkeling

$$b\frac{e^{ay} - e^{a_1 y}}{e^{by} - 1} = (a - a_1) + \sum_1^\infty g_k \frac{y^k}{k!},$$

waarin a en a_1 elk voor zich ondeelbaar zijn met b, de volgend uitkomst verkregen:

De coëfficiënt g_k is geheel, wanneer $k + 1$ ondeelbaar i met b. Voor de andere coëfficiënten bestaat het gebroke gedeelte uit breuken, wier noemers gemeenschappelijk deelers zijn van $k + 1$ en van b^k.

Voor $a_1 = 0$ kan men weder invoeren de functie van Bernoull $f_k\left(\frac{a}{b}\right)$. Voor deze functie geldt dan

$$b^{k+1}(k + 1)!\, f_k\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0$$

en verder

$$b^{k+1}\, k!\, f_k\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0,$$

als b en $k + 1$ onderling ondeelbaar zijn.

R 7 b, F 2 h, 8 h

DE CENTRALE BEWEGING EN DE FUNCTIËN VAN WEIERSTRASS,

DOOR

G. SCHOUTEN.
(Delft.)

De verschillende gevallen van centrale beweging, die in deel XIII van dit tijdschrift behandeld zijn door middel van de elliptische functien van Legendre en Jacobi, laten zich natuurlijk ook uitwerken in functiën van Weierstrass.

Daar deze in haar soort de eenvoudigste functiën zijn, is het te voorzien, dat de toepassing er van aanmerkelijke voordeelen zal opleveren.

Inderdaad springt dit reeds in 't oog uit het voorbeeld, dat ik hier ga behandelen, en waarbij de beweegkracht standvastig wordt ondersteld, zoowel door den meer geleidelijken en daardoor meer gemakkelijken gang van het onderzoek, als door de meerdere doorzichtigheid der formules.

In deel XIII heb ik de differentiaalvergelijkingen van de centrale beweging gebracht onder den volgenden vorm:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{\sqrt{(2U+h)r^2-C^2}} &= \lambda du \\ \pm\, dt &= \lambda du \\ \pm\, d\theta &= \lambda C\frac{du}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

U stelt hierin voor de krachtfunctie; $\frac{1}{2}$C de sectorsnelheid; $\frac{1}{2}h$ de totale energie van het bewegend punt, welks massa gelijk één gesteld wordt; $d\theta$ is de differentiaal van den hoek, door den voerstraal van het punt beschreven en dt de differentiaal van den tijd; r is de lengte van den voerstraal van 't punt; u de nieuwe veranderlijke, die in de plaats van r treedt en λ een nog te bepalen standvastige.

Is de kracht, die op het bewegende punt werkt, α, dan is de krachtfunctie $U = \alpha r$, en de differentiaalvergelijkingen (A) gaan over in

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{\sqrt{2\alpha r^3 + hr^2 - C^2}} &= \lambda du \\ \pm\, dt &= \lambda du \\ \pm\, d\theta &= \lambda C \frac{du}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

Om deze te integreeren, stellen we

$$r = \wp u - \frac{h}{6\alpha};$$

dan gaat $\sqrt{2\alpha r^3 + hr^2 - C^2}$ over in

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha(4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3)} = \wp' u \sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha},\ \frac{dr}{\sqrt{2\alpha r^3 + hr^2 - C^2}} \text{ in } \frac{du}{\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}},$$

waarin

$$g_2 = 3\left(\frac{h}{3\alpha}\right)^2,$$

$$g_3 = \frac{2C^2}{\alpha} - \left(\frac{h}{3\alpha}\right)^3$$

zijn. De discriminant $\Delta = g_2{}^3 - 27 g_3{}^2$ gaat hier over in

$$\Delta = 108 \frac{C^2}{\alpha^2}\left(\left(\frac{h}{3\alpha}\right)^3 - \frac{C^2}{\alpha}\right).$$

Stellen we verder $\dfrac{h}{6\alpha} = \wp a$, dan is $\wp'^2 a = -\dfrac{2C^2}{\alpha}$.

Voor $\alpha > 0$ en $\Delta > 0$ is $\wp a > 0$, $\wp'^2 a < 0$, bijgevolg ligt $\wp a$ tusschen e_1 en e_2, de beide grootste wortels van $\wp'^2 u = 0$. Derhalve moet in dit geval $\dfrac{h}{6\alpha} = \wp(\omega + ia)$ gesteld worden.

Is $\alpha > 0$ en $\Delta < 0$, dan is $g_3 > 0$, dus ook e_2, de eenige bestaanbare wortel van $\wp'^2 u = 0$, positief. Omdat $\wp'^2 a$ negatief is, moet a in $\wp(a)$ den vorm ib aannemen.

We hebben dus de volgende differentiaalvergelijkingen:

$\alpha > 0,\ \Delta > 0.$

$$\left.\begin{aligned} r &= pu - p(\omega + ia) \\ \sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\,dt &= (pu - p(\omega + ia))\,du \\ di\theta &= \frac{-p'(\omega + ia)\,du}{pu - p(\omega + ia)} \end{aligned}\right\} \text{(C)}$$

$\alpha > 0,\ \Delta < 0.$

$$\left.\begin{aligned} r &= pu - pia \\ \sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\,dt &= (pu - pia)\,du \\ di\theta &= \frac{-p'ia\,du}{pu - pia} \end{aligned}\right\} \text{(D)}$$

In 't geval (C) heeft r de minimum-waarde $p\omega - p(\omega + ia)$ of $e_1 - \dfrac{h}{6\alpha}$ voor $u = \omega$; dit is dus de perihelium-afstand. Worden t en θ gerekend van het oogenblik, dat het punt het perihelium van de baan passeert, dan zijn de integraalvergelijkingen van (C):

$\alpha > 0,\ \Delta > 0.$

$$\left.\begin{aligned} r &= pu - p(\omega + ia) \\ \sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\,t &= \zeta u - \zeta\omega + (u - \omega)\,p(\omega + ia) \\ i\theta &= \lg \frac{\sigma(u + \omega + ia)}{\sigma(u - \omega - ia)} \cdot \frac{\sigma(-ia)}{\sigma(2\omega + ia)} - 2(u - \omega)\,\zeta(\omega + ia) \end{aligned}\right\} \text{(E)}$$

Voor $u = 0$ worden r en t beiden oneindig groot, terwijl dan θ gegeven wordt door $\theta i = \lg \dfrac{\sigma(ia)}{\sigma(2\omega + ia)} + 2\omega\,\zeta(\omega + ia) =$

$$= i\left((2n + 1)\pi - 2a\eta - 2\omega\bar{\zeta}a + \omega\,\frac{\bar{p}'a}{e_1 + \bar{p}a}\right).$$

De baan heeft dus twee asymptoten, welke door het centrum gaan en een hoek $2\Theta = 4a\eta + 4\omega\bar{\zeta}a - 2\omega\,\dfrac{\bar{p}'a}{e_1 + \bar{p}a}$ insluiten.

In 't geval (D) bereikt r de minimum-waarde $p\omega_2 - pia$ of $e_2 - \dfrac{h}{6\alpha}$ voor $u = \omega_2$. Worden ook hier t en θ gerekend van het oogenblik, dat het punt het perihelium passeert, dan zijn de integraalvergelijkingen van (D):

$\alpha > 0,\ \Delta < 0$

$$\left.\begin{aligned} r &= pu - pia \\ \sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\,t &= \zeta u - \zeta\omega_2 + (u - \omega_2)\,pia \\ i\theta &= \lg \frac{\sigma(u + ia)}{\sigma(u - ia)} \cdot \frac{\sigma(\omega_2 - ia)}{\sigma(\omega_2 + ia)} - 2(u - \omega_2)\,\zeta ia \end{aligned}\right\} . \text{(F)}$$

Voor $u=0$ worden r en t beiden oneindig groot, terwijl dan θ gevonden wordt uit

$$i\theta = \lg - \frac{\sigma(\omega_2 - ia)}{\sigma(\omega_2 + ia)} + 2\omega_2 \zeta ia = i\left((2n+1)\pi - 2\eta_2 a - 2\omega_2 \overline{\zeta a}\right).$$

De baan heeft dus twee asymptoten, welke door het centrum gaan en een hoek $2\Theta = 4a\eta_2 + 4\omega_2 \overline{\zeta a}$ insluiten.

Het bijzondere geval $\alpha > 0$, $\Delta = 0$.

Dan is $\left(\frac{h}{3\alpha}\right)^3 = \frac{C^2}{\alpha}$; $g_2 = 3\left(\frac{h}{3\alpha}\right)^2$; $g_3 = \left(\frac{h}{3\alpha}\right)^3 = e_1{}^3$;

$$\wp u = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}} - \frac{1}{3}\right); \quad \wp\omega = e_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{h}{3\alpha};$$

$$e_2 = e_3 = -\frac{1}{2} e_1 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = -\frac{h}{6\alpha};$$

$$\zeta u = \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi u}{2\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u; \quad \zeta\omega = \eta = \frac{\pi^2}{12\omega};$$

$$\sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2} \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega};$$

$$\wp(\omega + ia) = \frac{h}{6\alpha} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2\omega}(\omega + ia)} - \frac{1}{3}\right);$$

dus

$$\sin^2 \frac{\pi}{2\omega}(\omega + ia) = \tfrac{3}{2}; \quad \cos^2 \frac{\pi}{2\omega}(\omega + ia) = -\tfrac{1}{2}.$$

Hierdoor gaan de integraalvergelijkingen (E) over in

$$r = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}} - \frac{2}{3}\right)$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\, t = \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi u}{2\omega} + \frac{\pi^2}{6\omega^2}(u - \omega)$$

$$i\theta = \lg \frac{\sin \frac{\pi}{2\omega}(u + \omega + ia)}{\sin \frac{\pi}{2\omega}(u - \omega - ia)} - 2(u - \omega)\frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi}{2\omega}(\omega + ia)$$

$$= \lg \frac{\sqrt{3}\cos\frac{\pi u}{2\omega} + i\sin\frac{\pi u}{2\omega}}{\sqrt{3}\cos\frac{\pi u}{2\omega} - i\sin\frac{\pi u}{2\omega}} - \frac{\pi}{\omega}(u-\omega)\frac{i}{\sqrt{3}}$$

$$= i\left((2n+1)\pi - \frac{\frac{\pi u}{\omega} - \pi}{\sqrt{3}} + \operatorname{bg\,tg}\frac{\sin\frac{\pi u}{\omega}}{1 + 2\cos\frac{\pi u}{\omega}}\sqrt{3}\right).$$

De hoek tusschen de asymptoten is dus

$$2\Theta = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\pi.$$

Deze uitkomst moet ook gevonden worden door rechtstreeksche integratie van de differentiaalvergelijkingen, welke in dit geval zijn, omdat $2ar^3 + hr^2 - C^2$ hier overgaat in $2a\left(r + \frac{h}{3a}\right)^2\left(r - \frac{h}{6a}\right)$,

$$\frac{dr}{\sqrt{2a}\left(r + \frac{h}{6a}\right)\sqrt{r - \frac{h}{6a}}} = \lambda du$$

$$dt = \lambda r du$$

$$d\theta = \lambda C \frac{du}{r}.$$

Gaan we nu over tot de beschouwing van $a < 0$, dus tot het geval, dat de kracht aantrekkend is.

Is $a < 0$, dan moet $h > 0$ en $\Delta > 0$ zijn.

De differentiaalvergelijkingen (C) schrijven we nu als volgt:

$$a < 0.$$

$$\left.\begin{aligned} r &= pu - \frac{h}{6a} \\ \sqrt{-\tfrac{1}{2}a}\,dt &= \left(pu - \frac{h}{6a}\right)diu \\ \frac{1}{C}\sqrt{-\tfrac{1}{2}a}\,d\theta &= \frac{diu}{pu - \frac{h}{6a}} \end{aligned}\right\}$$

Hieruit volgt, dat u van den vorm $iv +$ standvastige moet genomen worden, en wel van den vorm $iv + \omega$, omdat r positief moet blijven. Stellen we weer $\frac{h}{6a} = \wp a$, dus $\wp'^2 a = \frac{-2C^2}{a}$, dan is $\wp a < 0$ en $\wp'^2 a > 0$, bijgevolg zal $\wp x$ tusschen de kleinste wortels e_2 en e_3 van $\wp'^2 u = 0$ gelegen zijn en a van den vorm $\omega' + a$ wezen. De differentiaalvergelijkingen gaan dan over in

$$\left.\begin{aligned} r &= \wp(iu + \omega) - \wp(\omega' + a) \\ \sqrt{-\tfrac{1}{2}a}\,dt &= (\wp(iu + \omega) - \wp(\omega' + a))\,du \\ d\theta &= \frac{-\wp'(\omega' + a)\,du}{\wp(iu + \omega) - \wp(\omega' + a)} \end{aligned}\right\}$$

r verkrijgt voor $iu = 0$ de maximum-waarde

$$\wp\omega - \wp(\omega' + a) = e_1 - \frac{h}{6a}$$

en voor $iu = \omega'$ de minimum-waarde

$$\wp(\omega + \omega') - \wp(\omega' + a) = e_2 - \frac{h}{6a}.$$

De eerste is dus de aphelium-afstand, de tweede de perihelium-afstand.

Worden t en θ gerekend van het oogenblik, dat een aphelium wordt gepasseerd, dan zijn de integraalvergelijkingen:

$$a < 0.$$

$$r = \wp(iu + \omega) - \wp(\omega' + a)$$

$$\sqrt{-\tfrac{1}{2}a}\,t = i\zeta(\omega + iu) + u\wp(\omega' + a) - i\eta = \bar{\zeta}u + u\wp(\omega' + a) + \frac{1}{2}\frac{\bar{\wp}'u}{\bar{\wp}u - \bar{\wp}i\omega}$$

$$\theta = \frac{1}{i}\lg\frac{\sigma(\omega + iu + \omega' + a)}{\sigma(\omega + iu - \omega' - a)}\cdot\frac{\sigma(\omega - \omega' - a)}{\sigma(\omega + \omega' + a)} - 2u\zeta(\omega' + a).$$

Voor $iu = \omega'$ wordt het volgende perihelium bereikt; daartoe is noodig de tijd τ, gegeven door

$$\sqrt{-\tfrac{1}{2}a}\,\tau = i\eta'' + \frac{\omega'}{i}\wp(\omega' + a) - i\eta = i\eta' + \frac{\omega'}{i}\wp(\omega' + a),$$

terwijl de voerstraal daarbij een hoek Θ heeft beschreven, welke gegeven wordt door

$$\theta = \frac{1}{i}\lg\frac{\sigma(\omega+2\omega'+a)}{\sigma(\omega-a)}\cdot\frac{\sigma(\omega-\omega'-a)}{\sigma(\omega+\omega'+a)} - 2\frac{\omega'}{i}\zeta(\omega'+a),$$

$$= 2a\frac{\eta'}{i} - 2\frac{\omega'}{i}\left(\zeta a - \frac{1}{2}\frac{p'a}{e_2 - pa}\right).$$

De baan is dus geregeld gegolfd, de afstand van 't perihelium is $e_2 - \frac{h}{6a}$, die van het aphelium $e_1 - \frac{h}{6a}$.

Het bijzondere geval $\Delta = 0$.

Dan is $g_3 = \frac{C^2}{a} < 0$, dus $e_2 > 0$, bijgevolg $e_2 = e_1 = -\frac{1}{2}e_3$. De perihelium- en de aphelium-afstanden worden onderling gelijk, de baan is dus een cirkel.

Dit volgt ook uit de differentiaalvergelijkingen (B), welke in dit geval overgaan in

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{\sqrt{-2a}\left(r+\frac{h}{3a}\right)\sqrt{\frac{h}{6a}-r}} &= \lambda du \\ dt &= \lambda r du \\ d\theta &= \lambda C\frac{du}{r} \end{aligned}\right\}$$

Omdat toch $\frac{h}{6a} - r$ negatief is, kan aan de eerste vergelijking niet anders voldaan worden dan door $r = -\frac{h}{3a} =$ standvastig.

OVER HET KLEINSTE GEMEENE VEELVOUD VAN MEER DAN TWEE GETALLEN,

DOOR

E. D. J. DE JONGH Jr.

(Kampen.)

---

1. Bekend is de eigenschap, dat het K. G. V. van 3 getallen gelijk is aan het gedurig product van die getallen, vermenigvuldigd met hun G. G. D. en gedeeld door het gedurig product van de grootste gemeene deelers dier getallen, 2 aan 2 genomen. — Deze eigenschap kan gemakkelijk bewezen worden.

Ook is bekend de eigenschap, dat het K. G. V. van 4 getallen gelijk is aan het gedurig product dier getallen, vermenigvuldigd met het gedurig product van de grootste gemeene deelers dier getallen, 3 aan 3 genomen en gedeeld door den G. G. D. dier getallen, vermenigvuldigd met het gedurig product van de grootste gemeene deelers dier getallen, 2 aan 2 genomen. — Het bewijs voor deze eigenschap is eenigszins ingewikkelder.

2. Nu doen deze eigenschappen de vraag rijzen, of men op soortgelijke wijze voort kan gaan en het vermoeden is niet ongewettigd, dat op dergelijke manier ook het K. G. V. bepaald kan worden van 5 en meer getallen. Het onderzoek hiernaar wordt echter — als men den gewonen elementairen weg inslaat, die voor 3 en 4 getallen gebruikelijk is — reeds voor 5 getallen al te ingewikkeld en voor meer getallen geheel onuitvoerbaar; het is daarom, dat ik getracht heb het bestaan van soortgelijke eigenschap algemeen aan te toonen, d. w. z. een algemeene formule te vinden om van n getallen het K. G. V. te bepalen, waarvan de formules, die de bovengenoemde eigenschappen voor 3 en 4 getallen uitdrukken, slechts bijzondere gevallen zijn.

Inderdaad is het mij mogen gelukken, de navolgende eigenschap te vinden en de waarheid daarvan aan te toonen:

„Het K. G. V. van n getallen is gelijk aan het „gedurig product dezer getallen, maal het ge„durig product van de grootste gemeene dee„lers van de getallen 3 aan 3, 5 aan 5 enz. ge„nomen en gedeeld door het gedurig product „van de grootste gemeene deelers van de getal„len 2 aan 2, 4 aan 4, 6 aan 6 enz."

3. Laat gegeven zijn de n getallen

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots . \; a_n.$$

Stellen we den G. G. D. van a_i en a_k voor door g_{ik}, verder het gedurig product van de grootste gemeene deelers van de getallen, k aan k genomen, door G_n^k, het K. G. V. van de *eerste* $n-1$ getallen door K_{n-1} en dat van alle n getallen door K_n, dan wordt bovenstaande eigenschap uitgedrukt door de formule

$$K_n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n) \times (G_n^3 G_n^5 G_n^7 \ldots . G_n^{n-1})}{G_n^2 G_n^4 G_n^6 \ldots . G_n^n}$$

voor 't geval n *even* is en door

$$K_n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n) \times (G_n^3 G_n^5 G_n^7 \ldots . G_n^n)}{G_n^2 G_n^4 G_n^6 \ldots . G_n^{n-1}}$$

voor 't geval n *oneven* is.

4. Alvorens de waarheid van deze formules aan te toonen, zullen we eerst een hulpeigenschap bewijzen, nl.

„De G. G. D. van het K. G. V. van een groep van „$n-1$ getallen en een ander getal is gelijk aan het K. G. V. „van de grootste gemeene deelers van elk der $n-1$ getallen „van de groep en het andere getal."

Of, met inachtneming van de aangenomen notaties:

„De G. G. D. van K_{n-1} en a_n is gelijk aan het K. G. V. „van $g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \ldots . g_{(n-1)n}$."

B e w ij s. K_{n-1} is deelbaar door elk der getallen a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1} en is dus ook deelbaar door g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, ... $g_{(n-1)n}$.
a_n is ook deelbaar door g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, ... $g_{(n-1)n}$.

En daar een gemeene deeler van twee getallen deelbaar is op hun G. G. D., is de G. G. D. van K_{n-1} en a_n een gemeen veelvoud van g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, ... $g_{(n-1)n}$. Blijft nog over te bewijzen, dat deze G. G. D. van K_{n-1} en a_n het *kleinste* gemeene veelvoud is van g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, ... $g_{(n-1)n}$.

Stellen we daartoe:

$$a_1 = g_{1n} \times \alpha_1 \, ; \; a_2 = g_{2n} \times \alpha_2 \, ; \; \ldots . \; a_{n-1} = g_{(n-1)n} \times \alpha_{n-1},$$

dan kunnen we (omdat K_{n-1} en a_n beide deelbaar zijn door g_{1n}, g_{2n}, g_{3n} .... $g_{(n-1)n}$) zeggen:

$$K_{n-1} = (\text{K. G. V. van } g_{1n}, \; g_{2n}, \; g_{3n} \ldots . \; g_{(n-1)n})$$

vermenigvuldigd met een zekeren factor β

en

$$a_n = (\text{K. G. V. van } g_{1n}, \; g_{2n}, \; g_{3n} \ldots . \; g_{(n-1)n})$$

vermenigvuldigd met een zekeren factor α_n.

Of, als we het K. G. V. van g_{1n}, g_{2n}, g_{3n} .... $g_{(n-1)n}$ voorstellen door $K_{(n-1)}$:

$$K_{n-1} = K_{(n-1)} \times \beta$$

en

$$a_n = K_{(n-1)} \times \alpha_n.$$

Omdat nu $K_{(n-1)}$ alle factoren van g_{1n}, g_{2n}, g_{3n} .... $g_{(n-1)n}$ bevat maar geen andere, bevat β enkel factoren, die voorkomen in α_1, α_2, α_3 .... α_{n-1} en geen andere.

α_n daarentegen bezit geen enkelen factor, die voorkomt in α_1, α_2, α_3 .... α_{n-1}, want indien b.v. α_k en α_n een factor gemeen hadden, zou de G. G. D. van a_k en a_n *niet* g_{kn} zijn, maar g_{kn} vermenigvuldigd met dien factor.

β en α_n zijn dus onderling ondeelbaar en hieruit volgt de waarheid van de hulpeigenschap:

De G. G. D. van K_{n-1} en a_n is $K_{(n-1)}$.

5. Na deze uitweiding keeren wij terug tot onze eigenschap, in § 2 genoemd en in § 3 geformuleerd, en gaan nu aantoonen, dat als deze eigenschap waar is voor $n-1$ getallen, zij ook doorgaat voor n getallen.

Nemen we nu voor een oogenblik aan, dat de waarheid van onze eigenschap bewezen is voor de getallen

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ldots\ a_{n-1},$$

dat dus bewezen is

$$K_{n-1} = \frac{(a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n-1}) \times (G^3_{n-1} G^5_{n-1} G^7_{n-1} \ldots\ldots G^{n-1}_{n-1})}{G^2_{n-1} G^4_{n-1} G^6_{n-1} \ldots\ldots G^{n-2}_{n-1}},$$

waarbij — zonder dat dit aan de algemeenheid te kort doet — *n even* ondersteld is, en waarbij voor nu en 't vervolg wel in 't oog gehouden moet worden, dat even als bij K_{n-1} ook bij G^k_{n-1} de aanwijzer $n - 1$ *niet* ziet op $n - 1$ *willekeurige* getallen uit de gegevene, maar wel degelijk op de *eerste* $n - 1$ getallen — nemen we nu, zeg ik, deze formule als bewezen aan, dan krijgen we K_n door het K. G. V. te zoeken van K_{n-1} en a_n en dit is gelijk aan

$K_{n-1} \times a_n$ gedeeld door den G. G. D. van K_{n-1} en a_n.

Volgens de hulpeigenschap van § 4 is echter deze G. G. D. gelijk aan $K_{(n-1)}$, zoodat we hebben:

$$K_n = \frac{K_{n-1} \times a_n}{K_{(n-1)}}.$$

Indien de formule voor K_{n-1} waar is, hebben we analoog (indien we door $G^{(k)}_{n-1}$ voorstellen het gedurig product van de grootste gemeene deelers van g_{1n}, g_{2n}, g_{3n} .... $g_{(n-1)n}$, k aan k genomen)

$$K_{(n-1)} = \frac{(g_{1n} g_{2n} g_{3n} \ldots\ldots g_{(n-1)n}) \times (G^{(3)}_{n-1} G^{(5)}_{n-1} G^{(7)}_{n-1} \ldots\ldots G^{(n-1)}_{n-1})}{G^{(2)}_{n-1} G^{(4)}_{n-1} G^{(6)}_{n-1} \ldots\ldots G^{(n-2)}_{n-1}}.$$

De formule

$$K_n = \frac{K_{n-1} \times a_n}{K_{(n-1)}}$$

gaat dan over in:

$$K_n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n) \times (G^3_{n-1} G^5_{n-1} G^7_{n-1} \ldots G^{n-1}_{n-1})}{G^2_{n-1} G^4_{n-1} G^6_{n-1} \ldots G^{n-2}_{n-1}} \times$$

$$\times \frac{G^{(2)}_{n-1} G^{(4)}_{n-1} G^{(6)}_{n-1} \ldots G^{(n-2)}_{n-1}}{(g_{1n} g_{2n} g_{3n} \ldots g_{(n-1)n}) \times (G^{(3)}_{n-1} G^{(5)}_{n-1} \ldots G^{(n-3)}_{n-1} G^{(n-1)}_{n-1})}.$$

6. **Laat ons trachten deze formule te herleiden.**

De G. G. D. van de m getallen

$$a_h,\ a_i,\ a_k \dots a_p \text{ en } a_n$$

is dezelfde als de G. G. D. van de $m - 1$ getallen

$$g_{hn},\ g_{in},\ g_{kn} \dots g_{pn},$$

m. a. w. de G. G. D. van m getallen, waaronder a_n voorkomt, is dezelfde als de G. G. D. van $m - 1$ getallen, die — elk op zijn beurt — weer de grootste gemeene deelers zijn van a_n en elk der andere getallen.

De grootste gemeene deelers van de getallen

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \dots . a_n,$$

3 aan 3, 4 aan 4, 5 aan 5, ... m aan m genomen, krijgt men dus door bij de grootste gemeene deelers van

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \dots . a_{n-1},$$

3 aan 3, 4 aan 4, 5 aan 5, ... m aan m genomen, te voegen de grootste gemeene deelers van

$$g_{1n},\ g_{2n},\ g_{3n} \dots . g_{(n-1)n},$$

2 aan 2, 3 aan 3, 4 aan 4, ... $m - 1$ aan $m - 1$ genomen, dus ook:

$$\mathrm{G}^m_n = \mathrm{G}^m_{n-1} \times \mathrm{G}^{(m-1)}_{n-1}.$$

Schrijven we nu de in § 5 voor K_n gevonden formule als

$$\mathrm{K}_n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \times (\mathrm{G}^3_{n-1}\mathrm{G}^{(2)}_{n-1}) \times (\mathrm{G}^5_{n-1}\mathrm{G}^{(4)}_{n-1}) \times \dots \times (\mathrm{G}^{n-1}_{n-1}\mathrm{G}^{(n-2)}_{n-1})}{(\mathrm{G}^2_{n-1} \times g_{1n} g_{2n} \cdots g_{(n-1)n}) \times (\mathrm{G}^4_{n-1}\mathrm{G}^{(3)}_{n-1}) \times (\mathrm{G}^6_{n-1}\mathrm{G}^{(5)}_{n-1}) \times \dots \times (\mathrm{G}^{n-2}_{n-1}\mathrm{G}^{(n-3)}_{n-1})\mathrm{G}}$$

passen we hierop de zooeven genoemde formule voor G^m_n toe en houden we tevens in het oog, dat

$$\mathrm{G}^{(n-1)}_{n-1} = \mathrm{G}^n_n,$$

dan krijgen we:

$$\mathrm{K}_n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \times (\mathrm{G}^3_a \mathrm{G}^5_n \mathrm{G}^7_n \dots \mathrm{G}^{n-1}_n)}{\mathrm{G}^2_n \mathrm{G}^4_n \mathrm{G}^6_n \dots \mathrm{G}^n_n}.$$

En hiermede is bewezen, dat als onze eigenschap waar is voor $n - 1$ getallen, zij ook doorgaat voor n getallen.

Nu weten we, dat ze geldt voor 3 getallen; door het vorenstaande betoog is thans uitgemaakt, dat ze ook geldt

voor 4, 5 . . . ., in één woord voor een willekeurig aantal getallen.

Bovenstaande eigenschap uit de Rekenkunde, waarvan — voorzoover ik weet — nergens melding wordt gemaakt en die dus vóór dezen niet bekend schijnt geweest te zijn, is misschien belangrijk genoeg om haar niet der vergetelheid prijs te geven; vandaar, dat ik mij veroorloof haar langs dezen weg in wijderen kring bekend te maken.

DE OPVULLING DER RUIMTE DOOR REGELMATIGE EN HALF-REGELMATIGE LICHAMEN.

DOOR

F. J. VAES.
(Rotterdam.)

1. Men denke de ruimte opgevuld door kuben van gelijke afmeting, welker zijvlakken elkander twee aan twee volkomen bedekken, en beschouwe *acht* van zulke kuben, die één hoekpunt gemeen hebben, en die dus een kubus vullen van de dubbele afmeting.

Als nabij het gemeenschappelijk hoekpunt elk van deze acht wordt afgeknot door een plat vlak, dat van de ribben evengroote stukken afsnijdt, dan sluiten de acht zijvlakken een regelmatig achtvlak in.

Bij elk hoekpunt van elk der kuben kan men die afknotting volvoerd denken.

Denkt men de afgesneden stukken van nul af grooter wordend, dan komt er een oogenblik, dat elk der kuben is overgegaan in het half-regelmatige lichaam $\frac{6}{n}$, 8 [1]), dat dus de ruimte opvult met behulp van regelmatige achtvlakken.

Daar van elken kubus acht stukjes afgaan, die samen een achtvlak kunnen vormen, zijn er evenveel achtvlakken aanwezig als lichamen $\frac{6}{n}$, 8.

2. Groeien de afgesneden stukken aan tot de helft der ribbe van den kubus, dan zijn andere half-regelmatige lichamen ont-

[1]) Deze notatie is ingevoerd in de Congreslezing van April 1899. Zij beteekent dat de kubus (6-vlak) wordt afgeknot door een regelmatig 8-vlak op $\frac{1}{n}$ der ribben, waarbij n niet gelijk 2 of 3 is, maar een onmeetbaar getal dat berekend moet worden.

staan, namelijk $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$ (waarvan de hoekpunten de middelpunten zijn van de zijvlakken van een ruitentwaalfvlak), welke dus eveneens met behulp van een gelijk aantal achtvlakken de ruimte opvullen. Telkens twee achtvlakken hebben een hoekpunt gemeen, terwijl de hoofddiagonalen, door dat hoekpunt gaande, in elkanders verlengde liggen.

3. Bij verder aangroeien van de afgesneden stukken, dringen twee zulke achtvlakken in elkander, zoodat elk ervan wordt afgeknot tot een veertienvlakkig lichaam, begrensd door vierkanten en (niet-regelmatige) zeshoeken, terwijl ook elk der kuben overgaat in een veertienvlakkig lichaam, begrensd door vierkanten en (niet-regelmatige) zeshoeken.

Een zijde van een op een afgeknot achtvlak gelegen vierkant is ook zijde van een op een afgeknotten kubus gelegen zeshoek, en omgekeerd, zoodat als de op een achtvlak gelegen vierkanten, door aangroeiïng der van de ribben van den kubus afgesneden stukken, evengroot zijn geworden als die van den kubus, de zeshoeken op de achtvlakken zoowel als die van de kuben gelijke zijden zullen hebben; en dus (wegens de symmetrie) regelmatig zullen zijn.

Blijkbaar zijn nu de veertienvlakkige lichamen 6, $\frac{8}{3}$ aanwezig, waarmede Lord Kelvin de ruimte opvulde (*Nature*, April 1894), en waarvan het aantal dus gelijk is aan tweemaal het oorspronkelijk aantal kuben. Daaruit volgt onmiddellijk, dat de inhoud van zulk een lichaam de helft moet zijn van den kubus, waarin het geplaatst is [1]).

4. Door verdere aangroeiïng van de afgesneden stukken kan men elk der vierkanten op de kuben doen inkrimpen tot een punt, zoodat van elken kubus alleen het ingeschreven achtvlak is overgebleven, doch dan zijn de veertienvlakkige lichamen, die uit de achtvlakken ontstaan waren, aangegroeid tot de halfregelmatige $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$.

5. Door nog verdere aangroeiïng ontstaan weer (kleinere) achtvlakken met de halfregelmatige lichamen $\frac{6}{n}$, 8, en als men

---

[1]) Men zie de Verslagen der Kon. Acad. van Wet. 1894/95 deel III en Nieuw Archief, 2e reeks, 4e deel,

de achtvlakken tot een punt laat afnemen, verkrijgt men weer een opvulling met kuben, zoodanig dat de hoekpunten vallen in de middelpunten der oorspronkelijke, en omgekeerd.

Men heeft dus achtereenvolgens ruimte-opvulling door:

I. p kuben.

II. p lichamen $\frac{6}{\infty}$, 8 + p achtvlakken.

III. p lichamen $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$ + p achtvlakken.

IV. $2p$ lichamen 6, $\frac{8}{3}$.

V. p achtvlakken + p lichamen $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$.

VI. p achtvlakken + p lichamen $\frac{6}{\infty}$, 8.

VII. p kuben.

6. Uit de in No. 2 aangegeven opvulling van achtvlakken met lichamen $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$ is onmiddellijk een andere opvulling af te leiden.

Als men namelijk de hoekpunten van een der laatstgenoemde lichamen met het middelpunt ervan verbindt, en door twee opeenvolgende verbindingslijnen vlakken brengt, dan verdeelen deze het lichaam in acht viervlakken en zes vierzijdige pyramiden, waarvan alle ribben even groot zijn (namelijk gelijk aan de halve oppervlak-diagonaal van den oorspronkelijken kubus), zoodat de viervlakken regelmatig zijn, en telkens twee vierzijdige pyramiden van twee aan elkander sluitende lichamen $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$ te samen een regelmatig achtvlak vormen.

Blijkbaar is de ruimte dus op te vullen met achtvlakken en viervlakken. Daar eerst p lichamen $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$ aanwezig waren en p achtvlakken, en elk der eerstgenoemde lichamen acht viervlakken levert, en zes halve, dus drie geheele, achtvlakken, zullen er aanwezig zijn $4p$ achtvlakken en $8p$ viervlakken.

7. Ten einde de voorstelling te verduidelijken, denke men een plat vlak (gemakshalve horizontaal), opgevuld met vierkanten van dezelfde afmeting, zoodanig dat de ribben doorloopende lijnen vormen, en beschouwe de zijden dier vierkanten als ribben van regelmatige achtvlakken, dan hebben dus telkens vier van die achtvlakken één hoekpunt gemeen, terwijl telkens twee hoofddiagonalen in elkanders verlengde vallen.

Men zal dan een vijfde en een zesde achtvlak zóó kunnen plaatsen, dat een hoekpunt samenvalt met het gemeenschappelijke hoekpunt der eerste vier, terwijl zij telkens een ribbe gemeen hebben met een van die vier.

De voorstelling is misschien nog eenvoudiger, als men zich een aantal achtvlakken naast elkander geplaatst denkt als aangegeven, dus zoodanig dat een plat vlak opgevuld wordt door vierkanten, gevormd door telkens vier der ribben van de achtvlakken, en nu een tweede dergelijk samenstel op het eerste legt, zoodanig dat de hoekpunten der achtvlakken, die zich onder het tweede horizontale vlak bevinden, samenvallen met de hoekpunten der vierkanten in het eerste vlak, en omgekeerd de hoekpunten van de achtvlakken boven het eerste vlak, komen in de hoekpunten der vierkanten van het tweede vlak. Het valt onmiddellijk in het oog, dat tusschen twee achtvlakken van het eerste samenstel, en twee van het tweede, welke twee aan twee een ribbe gemeen hebben, een ruimte overblijft, begrensd door één zijvlak van elk der vier achtvlakken; en dus blijkbaar van den vorm van een regelmatig viervlak.

8. De opvulling der ruimte door achtvlakken en viervlakken

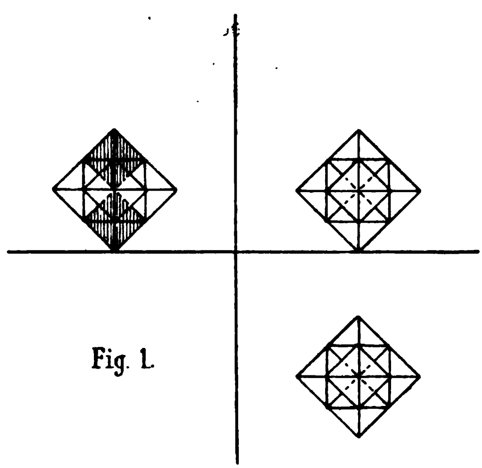


Fig. 1.

blijkt ook uit een projectieteekening (fig. 1), waarin de ge-

arceerde achtvlakken blijkbaar niet aansluiten tegen de andere, doch ruimten openlaten van den vorm van fig. 2.

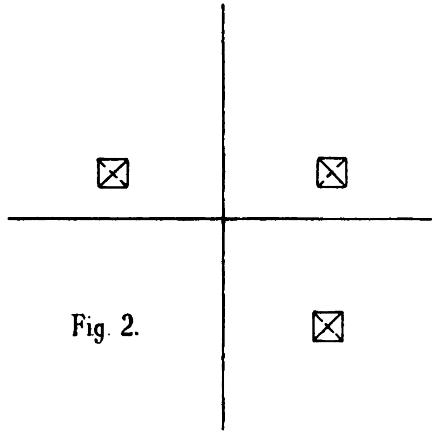


Fig. 2.

9. Denkt men elk viervlak verdeeld in vier driezijdige pyramiden, die het middelpunt van het viervlak als top en de zijvlakken als grondvlak hebben, dan blijkt, dat tegen elk achtvlak acht zulke vierdedeelen van een viervlak aansluiten, zoodat bij elk achtvlak twee viervlakken behooren, zooals reeds in No. 6 op andere wijze was aangetoond.

(In het algemeen als p-vlakkige lichamen met q-vlakkige lichamen de ruimte opvullen, zoodanig dat elk zijvlak van een p-vlak aansluit tegen een zijvlak van een q-vlak, en omgekeerd, dan is de verhouding van het aantal p-vlakken tot het aantal q-vlakken als $p : q$. Als van de p-vlakken telkens r zijvlakken aansluiten tegen andere p-vlakken, en dus slechts $(p - r)$ zijvlakken tegen q-vlakken, dan is de bedoelde verhouding als $(p - r) : q$. Enz.)

10. Zoowel uit de laatstbesproken opvulling der ruimte door achtvlakken en viervlakken als uit de oorspronkelijke opvulling door kuben, is een andere ruimtevulling af te leiden, die (meetkundig) gesteld kan worden naast die van Lord Kelvin, namelijk door *ruitentwaalfvlakken.*

Want elk achtvlak vormt met de acht daaraan grenzende vierdedeelen der viervlakken een $r12$, zooals gemakkelijk blijkt als men het $r12$ beschouwt als omhullende van het achtvlak [1]).

[1]) Men zie de vermelde Congreslezing en de brochure „Het onderling verband der regelmatige lichamen en twee der half-regelmatige." Leiden Sijthoff 1899

11. Daar het $r12$ ook te verkrijgen is door omhulling van een kubus, zal men ook van een beschouwing van een ruimteopvulling door kuben kunnen uitgaan. Denkt men tegen elk der zijvlakken van een kubus een even grooten kubus geplaatst, dan zijn de hoekpunten van den eersten en de middelpunten van de zes andere de hoekpunten van een $r12$. Dergelijke samenstellingen van zeven kuben denke men zoo geplaatst dat twee kuben van een der samenstellingen samenvallen met twee van eene andere. De middenkuben komen dan zoo te staan, dat telkens twee een ribbe gemeen hebben, en de diagonaalvlakken door de ribbe samenvallen.

Om elk der zes aansluitende kuben van een samenstel liggen dus zes middenkuben. Denkt men zich de middenkuben in hun geheel, en de andere kuben verdeeld in zes regelmatige pyramiden, waarvan de zijvlakken grondvlakken zijn, dan blijkt daaruit de opvulling der ruimte door $r12$.

12. Het voorgaande is korter te zeggen, wanneer men de benamingen invoert:

aanliggende, *omliggende* en *aangrenzende* kuben voor de *zes*, *twaalf* en *acht* kuben, die in een ruimtevulling door kuben met een gegeven kubus *een zijvlak*, *een enkele ribbe* of *een enkel hoekpunt* gemeen hebben.

Want dan kan men het in No. 11 vermelde als volgt in woorden brengen:

Omhult men een der kuben van een ruimteopvulling, en de twaalf omliggende; daarna de omliggende van elk der laatstgenoemde twaalf, enzoovoort, dan wordt elk der aanliggende kuben in zes deelen verdeeld zonder eenig overschot.

(De kuben, die hierbij als aanliggend beschouwd worden, zijn ten opzichte van elkander aangrenzend.)

Duidelijk blijkt, dat in de middelpunten der aanliggende kuben zes $r12$ samenkomen, terwijl in de hoekpunten der omliggende vier van lichamen aaneensluiten, doordien zulk een hoekpunt tot vier omliggende kuben behoort.

13. Op nog twee andere wijzen kan men de opvulling der ruimte door $r12$ aantoonen. Vooreerst door op te merken, dat als men twee $r12$ tegen elkander plaatst, zoodat twee

zijvlakken samenvallen, op elke ribbe van die zijvlakken nog een hoek van 120° overblijft (daar de standhoek van het $r12$ 120° is), waarin dus een derde $r12$ kan geplaatst worden, zoodanig dat twee zijvlakken ervan samenvallen met een zijvlak van het eerste en een zijvlak van het tweede.

Ten tweede kan men het $r12$ zóo projecteeren op drie onderling loodrechte vlakken, dat de drie projecties vierkanten zijn met de lijnen, die de middens der overstaande zijden verbinden (fig. 3).

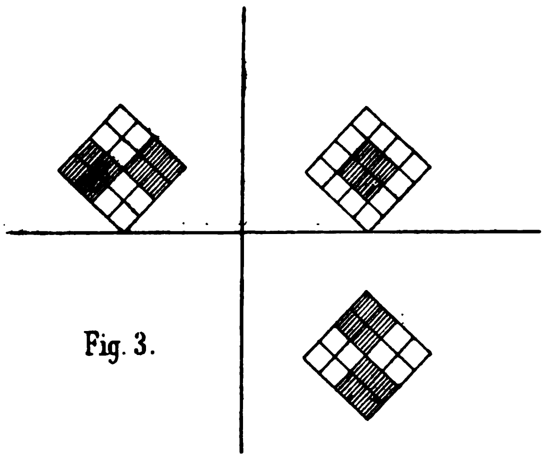


Fig. 3.

Plaatst men vier $r12$ tegen elkander, zoodat elk ervan éen zijvlak gemeen heeft met twee andere en éen hoekpunt met een vierde, dan kunnen een vijfde en een zesde $r12$ zoodanig geplaatst worden, dat éen hoekpunt in het eerstgenoemde hoekpunt valt, en de vier zijvlakken samenvallen met een zijvlak van elk der eerste vier $r12$, zooals onmiddellijk blijkt uit de arceering.

14. Terwijl het $r12$, en het lichaam 6, $\frac{8}{3}$ de eenige halfregelmatige lichamen zijn, waarmede de ruimte kan worden opgevuld, en een vijftal ruimtevullingen met *twee* soorten lichamen besproken werden, kunnen nog andere opvullingen met *drie* soorten lichamen worden aangegeven.

Bij de opvulling door achtvlakken en viervlakken komen in elk hoekpunt zes achtvlakken en acht viervlakken samen. Knot men deze af door vlakken, die van in éen punt samenkomende ribben gelijke stukken afsnijden, dan sluiten deze vlakken het veertienvlakkige lichaam $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$ in (daar elk acht-

vlak een vierkant, en elk viervlak een driehoek als grensvlak geeft).

Wordt de afknotting bij elk hoekpunt uitgevoerd, en neemt men de afgesneden stukken gelijk aan een derde van de ribben, dan gaat elk achtvlak over in het lichaam $6, \frac{8}{3}$ van Lord Kelvin, en elk viervlak in het half-regelmatige lichaam $\frac{4}{3}, 4$ (begrensd door vier driehoeken en vier zeshoeken).

15. Om na te gaan hoeveel lichamen van elke soort aanwezig zijn, merke men op, dat bij de opvulling door achtvlakken en viervlakken het aantal hoekpunten gelijk moet zijn aan het aantal achtvlakken. Immers heeft elk achtvlak zes hoekpunten, en telkens zes hoekpunten komen samen, zoodat men van elk achtvlak één hoekpunt kan beschouwen als een punt van het samenstel, waarin vijf andere worden opgenomen zonder mede te tellen.

Daar er p achtvlakken waren met $2p$ viervlakken, zullen er nu zijn:

p lichamen $\frac{6}{2}, \frac{8}{2}$ + p lichamen $6, \frac{8}{3}$ + $2p$ lichamen $\frac{4}{3}, 4$.

16. Als men bij de afknotting de deelvlakken door de middens der ribben legt, dan gaan de achtvlakken over in de lichamen $\frac{6}{2}, \frac{8}{2}$, en de viervlakken in regelmatige achtvlakken, zoodat men de opvulling van No. 5 terugvindt, en wel:

$2p$ lichamen $\frac{6}{2}, \frac{8}{2}$ + $2p$ regelmatige achtvlakken.

17. Wanneer men bij de opvulling door $r12$ deze afknot tot de halfregelmatige lichamen $r12$; $\frac{8}{3}, 6$ (begrensd door achttien vierkanten, welke drie onderling loodrechte gordels ieder van acht vierkanten vormen, en acht driehoeken), dan ontstaan bij de punten, waar zes $r12$ samenkomen, kuben, en bij de andere regelmatige viervlakken. In eerstgenoemde punten komen slechts *scherpe* hoeken van zijvlakken samen, in laatstgenoemde slechts *stompe* hoeken.

Omdat elk $r12$ zes hoekpunten heeft waar scherpe hoeken samenkomen en telkens zes van zulke punten samenvallen, zal in verband met het in No. 11 besprokene het aantal van die hoekpunten juist gelijk zijn aan het aantal $r12$.

Omdat elk $r12$ *acht* hoekpunten heeft, waarin stompe hoeken samenkomen, en telkens slechts vier daarvan samenvallen, zal

het aantal van zulke hoekpunten het dubbele zijn van het aantal $r12$.

Na de afknotting zal men dus hebben:

p lichamen $r12$; $\frac{8}{3}$, 6 + p kuben + $2p$ viervlakken.

18. Wanneer men van 6 in éen punt samenkomende $r12$ twee overstaande laat aangroeien, zoodat ze in elkander dringen, en dus elkander afknotten, dan verkrijgt men eveneens lichamen $r12$; $\frac{8}{3}$, 6, die nu echter op andere wijze geplaatst zijn dan in het voorgaande geval.

Om zich voor te stellen, wat er van de andere $r12$ overblijft, is het gemakkelijker zich acht afgeknotte $r12$ tegen elkander geplaatst te denken, zoodanig dat telkens twee kubus-vierkanten tegen elkander sluiten [1]).

Dan ziet men, dat tusschen telkens vier der lichamen een kubus geplaatst kan worden, waarvan vier der zijvlakken aansluiten tegen $r12$-vierkanten, die met de acht eerste lichamen samen een ruimte insluiten, waaraan elke kubus een vierkant, en elk der andere lichamen een driehoek als grensvlak geeft, en welke dus een lichaam $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$ kan bevatten.

Omdat elk der acht eerste lichamen twaalf kuben draagt, en elke kubus slechts aansluit tegen vier van de eerste lichamen, moet het aantal kuben een derde deel zijn van het aantal der andere lichamen.

Omdat elk der acht eerste lichamen acht driehoeken draagt, en elk lichaam $\frac{8}{2}$, $\frac{6}{2}$ eveneens, zullen er evenveel lichamen van elke soort zijn. Men heeft dus

p lichamen $r12$, $\frac{8}{3}$, 6 + $\frac{1}{3}\,p$ kuben + p lichamen $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$.

---

[1]) In elk zijvlak van een $r12$ kan men een vierkant beschreven denken. Tusschen telkens vier vierkanten bevindt zich dan een ander vierkant, gelegen op een kubusvlak van het afknottende veertienvlakkige lichaam van Lord Kelvin, en tusschen telkens drie vierkanten een driehoek, gelegen op een octaëder-vlak van het afknottende lichaam. De vierkanten kan men dus onderscheiden in $r12$-vierkanten, en in kubus-vierkanten. Zij onderscheiden zich van elkander daardoor, dat elk $r12$-vierkant begrensd wordt door twee driehoeken en twee vierkanten, en elk kubus-vierkant door vier vierkanten.

UEBER DIE GESTALT EINES SCHWEREN CYLINDERS, DER, AUF EINER HORIZONTALEN EBENE ROLLEND, TAUTOCHRON SCHWINGT,

VON

F. SCHUH.
(Göttingen.)

Die Bedingung des Tautochronismus bei einem Freiheitsgrad.

1. Sei ϕ die allgemeine Coordinate, V die potentielle Energie, die wir beide in der Gleichgewichtslage als Null annehmen. Die lebendige Kraft $T = \frac{1}{2}\tau_\phi\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$ wird, wenn wir die Coordinate $z = \int_0^\phi \sqrt{\tau_\phi}\,d\phi$ einführen, $T = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$. Die endlichen Schwingungen sind tautochron, wenn $F_z = -\frac{dV}{dz} = -kz$, d. h. $\sqrt{\frac{2V}{k}} = z = \int_0^\phi \sqrt{\tau_\phi}\,d\phi$, oder (nach ϕ differentiiert):

$$F_\phi^2 = 2kV\tau_\phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn $F_\phi = -\frac{dV}{d\phi}$ bedeutet. *Das ist die gesuchte Bedingung des Tautochronismus.*

Aus $F_z = -kz$ folgt für die Bewegungsgleichung $\frac{d^2z}{dt^2} = -kz$, also $C\sin(t\sqrt{k}) = z = \sqrt{\frac{2V}{k}}$ oder

$$\sin\frac{2\pi t}{\vartheta} = \sqrt{\frac{V}{\varepsilon}}, \quad \vartheta = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

unter ϑ und ε die Periode der Schwingungen, und die Gesamtenergie verstanden.

Anwendung auf unseren speciellen Fall.

2. In der Fig. 1 ist der Cylinder gezeichnet in einer beliebigen Lage und in der Gleichgewichtslage, bei welcher letzteren dieselben Buchstaben benützt sind mit dem Index 1 versehen. Sei G der Schwerpunkt, und weiter

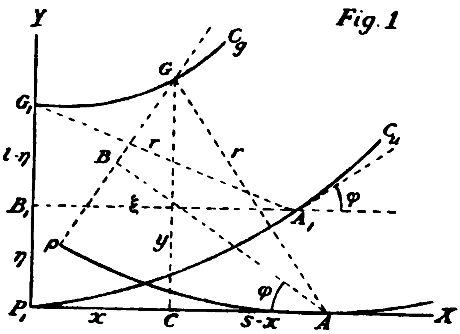


Fig. 1

$$\text{arc PA} = \text{arc P}_1\text{A}_1 = s$$
$$\text{PB} = \text{P}_1\text{B}_1 = \eta$$
$$\text{BA} = \text{B}_1\text{A}_1 = \xi$$
$$\text{PG} = \text{P}_1\text{G}_1 = l$$
$$\text{GA} = \text{G}_1\text{A}_1 = r$$
$$\text{GC} = y$$
$$\text{P}_1\text{C} = x.$$

ξ und η sind die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes A_1 der Umrisscurve C_u, die durch einen senkrechten Querschnitt des Cylinders in der Gleichgewichtslage erzeugt wird; x und y die Coordinaten eines Punktes G der Schwerpunktscurve C_g. Nun ist:

$$r^2 = (s - x)^2 + y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Weil die Bewegung des Cylinders als eine momentane Rotation um A aufzufassen ist, so hat man, wenn ϕ, der Winkel zwischen der Tangente in A_1 und der X-axe, als die allgemeine Coordinate gewählt wird,

$$\frac{dy}{d\phi} = s - x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\frac{dx}{d\phi} = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\tau_\phi\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\,(a^2 + r^2)\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

worin m die Masse, a den Trägheitsradius bedeutet. Die potentielle Energie, die wir in der Gleichgewichtslage zu Null annehmen, wird

$$V = mg(y - l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Vermöge (4) ist also:

$$F_\phi = -\frac{dV}{d\phi} = -mg(s - x).$$

Aus (3), (4) und (5) folgt:

$$\frac{d(r^2)}{d\phi} = 2\left\{(s - x)\left(\frac{ds}{d\phi} - y\right) + y(s - x)\right\} = 2\frac{ds}{d\phi}(s - x) = 2\frac{ds}{d\phi}\frac{dy}{d\phi},$$

also:

$$\frac{d(r^2)}{dy} = 2\frac{ds}{d\phi}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Jetzt die Bedingung (1) des Tautochronismus anwendend, finden wir

$$g(s - x)^2 = 2k(y - l)(a^2 + r^2)$$

oder $n = \frac{g}{2k}$ einführend (n hat die Dimension einer Strecke),

$$(a^2 + y^2)(y - l) = (s - x)^2(n + l - y). \quad . \quad . \quad (9)$$

Das ist unsere Hauptrelation, aus der wir alles Weitere ableiten müssen.

Für r finden wir daraus:

$$r^2 = \frac{a^2(y - l) + y^2 n}{n + l - y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die Grösse $n = \frac{g}{2k}$ hat eine einfache mechanische Bedeutung; sie ist nämlich die halbe reducierte Pendellänge des Cylinders, wie man sofort aus $\vartheta = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2n}{g}}$ erkennt (Glg. (2)).

n und a sind immer positive Grössen; l kann aber negativ werden z. B. wenn ein Cylinder, der mit seinen beiden Enden auf zwei Stücken einer Ebene aufliegt, in seiner Mitte ein

Pendel trägt, wie Fig. 2 andeudet. Man überzeugt sich leicht, dass dieser Umstand unsere Formeln nicht ändert.

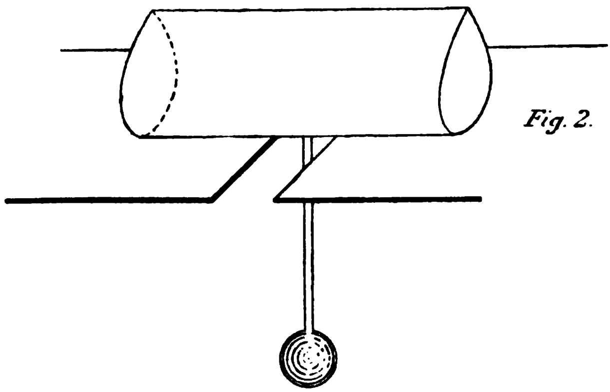


Fig. 2.

Um zu finden wie G seine Bahncurve C_g durchläuft, haben wir Gleichung (2) anzuwenden. Vermöge (7) ist, wenn y_0 der grösste Wert ist, den y erreicht:

$$\sin\frac{2\pi t}{\vartheta} = \sqrt{\frac{mg\,(y-l)}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{y-l}{y_0-l}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

In dieser Gleichung tritt a nicht auf, so dass y sich ebenso mit der Zeit ändert, wie wenn $a = 0$ und G also als ein schwerer Punkt aufzufassen ist, der längs einer Cycloïde schwingt.

Die Schwerpunktscurve C_g.

3. Aus (4) und (5) folgt $s - x = y\dfrac{dy}{dx}$; also giebt Gleichung (9)

$$x = \int_l^y y\sqrt{\frac{n+l-y}{(y-l)\,(a^2+y^2)}}\,.\,dy\,. \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Das ist die Gleichung der Schwerpunktscurve C_g (die noch auf elliptische Integrale zu reducieren ist); n und a sind positiv, sonst sind n, a und l beliebig. Die Gestalt der Curve hängt nur von den Verhältnissen von n, a und l ab; ihre Grösse ist dann einer dieser Grössen proportional. Man sieht aus (12), dass y zwischen l und $l+n$ gelegen sein muss.

Die Curve C_g ist durch eine Quadratur zu rectificieren.

Aus (12) findet man für die Bogenlänge s_1 bis zum Punkte $x = 0 \;\; y = l$

$$s_1 = \int_l^y \sqrt{\frac{a^2(y-l)+y^2 n}{(y-l)(a^2+y^2)}} \cdot dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Für $a = 0$ wird dies $s_1 = 2\sqrt{n(y-l)}$.

Auch der Krümmungsradius is leicht aus (12) zu bestimmen. Man findet dafür

$$\rho = \frac{2(n+l-y)^{\frac{1}{2}} \{a^2(y-l)+y^2 n\}^{\frac{3}{2}}}{ny^3 + a^2\{2y^2-(n+4l)y+2l(n+l)\}} \quad . \quad . \quad (14)$$

Für $a = 0$ giebt das $\rho = 2\sqrt{n(n+l-y)}$. In dem tiefsten Punkte $(y = l)$ wird der Krümmungsradius:

$$\rho_1 = 2n \frac{l^2}{a^2+l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

eine Formel die gültig bleibt bei beliebiger Gestalt des Cylinders, wenn n sich nur auf unendlich kleine Schwingungen bezieht.

4. Ist $a = 0$, befindet sich also alle Masse in einer Axe durch den Schwerpunkt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in dem Schwerpunkt, so ist:

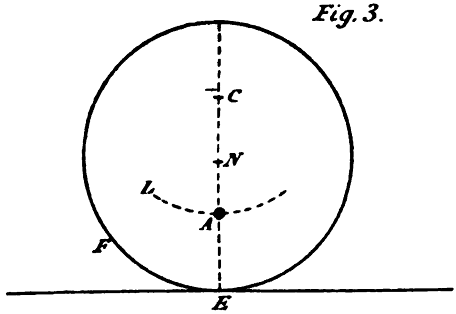
$$x = \int_l^y \sqrt{\frac{l+n-y}{y-l}} \cdot dy,$$

und C_g ist also eine Cycloide, deren tiefster Punkt sich in der Gleichgewichtslage G_1 des Schwerpunktes befindet, während der Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich n, die erzeugende Gerade $y = n + l$ ist. Die Spitzen der Cycloide haben die Coordinaten $\pm \frac{1}{2}\pi n$ und $n + l$. Wir werden sehen, dass diese Spitzen erst bei unendlich grossen Schwingungen durch den Schwerpunkt erreicht werden.

Dass für $a = 0$ die Curve C_g eine Cycloïde ist, war natürlich ohne unsere allgemeineren Betrachtungen sofort zu sehen, weil man für $a = 0$ wesentlich nur mit den Schwingungen eines materiellen Punktes zu thun hat. Der Durchmesser des Kreises ist gleich der Hälfte des grössten Krümmungsradius der Cycloïde, oder gleich der halben Pendellänge, also gleich n, wie wir auch oben fanden.

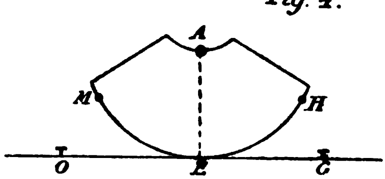
Es ist bemerkenswert, dass schon Christiaan Huygens sich mit diesem einfacheren Fall beschäftigt hat, worauf mich Herr Prof. D. J. Korteweg aufmerksam gemacht hat. Auf Seite 253 der Handschrift Olim G (nicht herausgegeben), wie aus den dort vorkommenden Datierungen hervorgeht, wahrscheinlich ungefähr Jan. 1670, stellt er sich die Frage nach der Schwingungszeit eines materiellen Punktes A befestigt an einer kreisförmigen Curve FE, welche über eine horizontale Gerade rollt. Er kommt zu dem folgenden Resultat (siehe Fig. 3): „Si NE $= d$ „sit radius circumferen„tiae EF quae super „plano volvitur, motu „reciproco, et EA $= b$ „distantia ponderis A „plano affixi, *a* puncto „E. Erit $\frac{b\,.\,b}{d-b} =$ CA „longitudo penduli iso„chroni oscillationibus „ponderis A ita agitati, sive CA erit radius circonferentiae „maximae curvae AL, in qua pondus A fertur, intus tangentis.”

Fig. 3.



Darauf geht er aber in folgender Weise weiter: „Potest EF „curva esse ejus figurae ut pondus A versetur in cava cycloide, „ve tunc oscillationes fient isochronae.” Er scheint sogar an eine Realisation eines derartigen Mechanismus gedacht zu haben, wenn er hinzufügt (siehe Fig. 4): „Saltem mechanice satis „prope inveniri poterit. Fila „seu fasciolae planae sunt „MEG, HEO. Altera affixa „in M et G, altera in H et O. „His retinebitur solidum vo„lutatum. Ut sit portabile.” Gelegentlich werden wir noch erwähnen, was er einige Seiten weiter über die Curve EF aussagt.

Fig. 4.



5. Betrachten wir jetzt den Fall, dass a nicht gleich Null ist, und anfänglich auch dass l positiv ist. *Die Curve C_g hat für $y = l$ eine horizontale Tangente, für $y = l + n$ eine Spitze*

mit einer vertikalen Tangente; das sind (wenn l pos. ist) die einzigen Stellen, in denen die Tangente vertikal ist. Die vertikalen Linien durch die höchsten und niedrigsten Punkte sind Symmetrielinien von C_g. Für jedes y ist die Curve C_g steiler als die Cycloide mit demselben n und l für $a = 0$.

Um zu untersuchen ob C_g Wendepunkte hat, betrachten wir den Ausdruck für den Krümmungsradius, oder für $\frac{d^2y}{dx^2}$. Man findet dass die Curve concav ist für

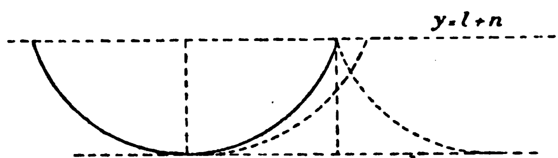
$$D \equiv ny^3 + a^2\{2y^2 - (n+4l)y + 2l(n+l)\} = ny(y^2+a^2) - 2a^2(y-l)(l+n-y)$$

positiv und convex für D negativ (weil $D = 2y^3(n+l-y)^2 \frac{d^2y}{dx^2}$).

Die Gleichung 3[ter] Ordnung $D = 0$ giebt die Wendepunkte. Weil aber $D(l)$ und $D(n+l)$ für $l > 0$ beide positiv sind, *so hat* C_g *keinen oder zwei Wendepunkte zwischen ihrem höchsten und ihrem tiefsten Punkt.* Dass beide Fälle wirklich eintreten können (den Uebergangsfall hat man offenbar, wenn die Discriminante von D verschwindet), ist leicht zu zeigen. Denn für $a = 0$ ist C_g eine Cycloide, und hat also keine Wendepunkte, während in dem anderen Grenzfall $a = \infty$ (oder jedenfalls sehr gross) $D = a^2\{2y^2 - (n+4l)y + 2l(n+l)\}$ wird. Dieser Ausdruck hat für $y = l + \frac{1}{4}n$ (also zwischen $y = l$ und $y = l + n$) seinen kleinsten Wert $na^2(l - \frac{1}{8}n)$, so dass Wendepunkte existieren für $n > 8l$, nicht für $n < 8l$.

Die Curve C_g kann also für $l > 0$ die beiden in Fig. 5 und 6

Fig. 5.



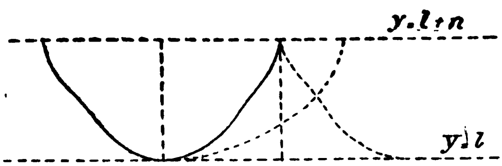


Fig. 6.

gezeichneten Formen annehmen (die punktierte Curve stellt die Cycloide für $a = 0$ dar).

6. Sei jetzt $l + n < 0$, so dass die ganze Curve C_g unter der horizontalen Ebene E liegt. Aus dem Ausdruck für D sieht man, dass D für $l \leqq y \leqq n + l$ negativ wird, *sodass C_g keine Wendepunkte hat*, und ungefähr die Gestalt der in Fig. 5 gezeichneten Curve annimmt.

7. Abweichend verhält sich die Sache, wenn $l < 0 < l + n$. *Dann ist für $y = 0$ (also in dem Schnittpunkt mit der Ebene* E) *die Tangente vertikal.* Die Curve ist concav für $y\mathrm{D} > 0$ und convex für $y\mathrm{D} < 0$. Für $y < 0$ hat man keine Wendepunkte, weil dann D immer negativ ist ($y = 0$ giebt, obgleich dort $y\mathrm{D} = 0$ ist, keinen Wendepunkt; der Krümmungsradius ist dort $\rho_{y=0} = a\sqrt{\frac{-l}{n+l}}$ und also endlich). Weiter bemerken wir, dass die Gleichung $\mathrm{D} = 0$ in dem Falle $l < 0 < l + n$ nur einen Zeichenwechsel hat, also eine positive reëlle Wurzel, die (weil D(0) negativ und $\mathrm{D}(n + l)$ positiv ist) zwischen Null und $l + n$ liegt. C_g *hat also einen und nur einen Wendepunkt, der zwischen der horizontalen Ebene* E *und der Spitze gelegen ist.*

Die Curve kann noch zwei, wenn auch nicht wesentlich, verschiedene Gestalten annehmen, je nachdem der Teil unter oder der Teil über der Ebene E sich am meisten in horizontaler Richtung erstreckt. Man hat gewiss den ersten Fall wenn $l + n$, den zweiten, wenn l klein ist. Die Figuren 7

Fig. 7.

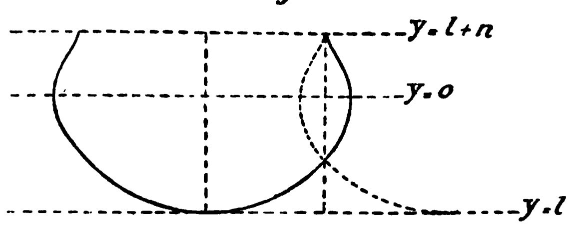
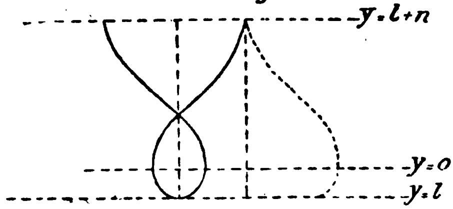


Fig. 8.

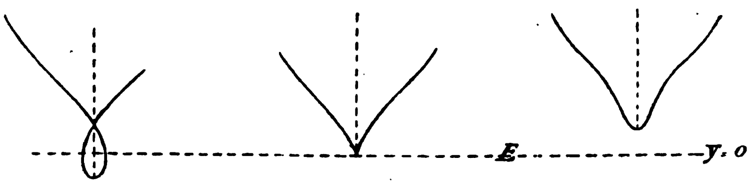


und 8 veranschaulichen für beide Fälle die Gestalt von C_g.

Dass C_g in dem Schnittpunkt mit E eine vertikale Tangente hat, folgt auch aus einer leichten geometrischen Ueberlegung. Befindet sich der Schwerpunkt in G, so findet man den Berührungspunkt des Cylinders mit E als Schnittpunkt A (siehe Fig. 1) der Normale der Curve C_g mit E; weiter ist $GA = r$. Liegt aber G in der Ebene E, so ist GA auch Krümmungsradius von C_g (wofür wir also wie früher $a\sqrt{\frac{-l}{n+l}}$ finden) und die Tangente in G steht senkrecht auf E.

8. Zwischen den betrachteten Fällen hat man zwei Uebergangsfälle. Erstens ist da der Fall $l = 0$ (siehe Fig. 9). Dann

Fig. 9.

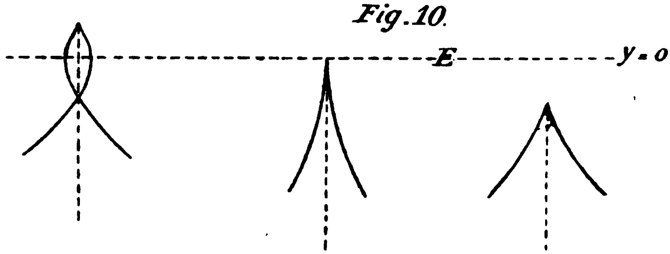


ist $\rho_1 = 0$ und C_g *hat für* $y = l = 0$ *keine horizontale, sondern eine vertikale Tangente; sie hat dort eine gewöhnliche Spitze* (wie zu erwarten war, weil jetzt G_1 Berührungspunkt von C_n und E ist, und als solcher eine Spitze mit vertikaler Tangente beschreibt), und in der Nähe dieser Spitze ungefähr die Gestalt der cubischen Parabel $x = \frac{2\sqrt{n}}{3a} y^{\frac{3}{2}}$. *Die Curve* C_g *hat jetzt eine obere* $(y = n)$ *und eine untere* $(y = 0)$ *Spitze, zwischen denen sich ein und nur ein Wendepunkt befindet.* Die Gleichung $D = 0$ hat eine Wurzel $y = 0$. Den Wendepunkt, der also in die untere Spitze hineingerückt ist, kann man durch klein und positiv gewähltes l wieder zum Vorschein bringen; C_g hat dann zwischen $y = l$ und $y = l + n$ zwei Wendepunkte, sodass man für beliebige n und a (nur nicht $a = 0$) l stets so klein und positiv wählen kann, dass C_g zwei Wendepunkte hat (dabei ist immer gemeint, dass man von den symmetrisch gelegenen Punkten absieht).

Einen anderen Uebergangsfall hat man für $n + l = 0$ (siehe

Fig. 10) Während C_g in dem höchsten Punkte sonst die Gestalt

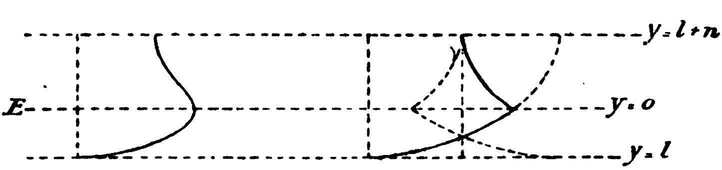
Fig. 10.



einer cubischen Parabel hat, hat sie jetzt ungefähr die Gestalt der Curve $x - c = \frac{2}{5a\sqrt{-l}}(-y)^{\frac{5}{2}}$ (wenn für $y = 0$ $x = c$), *also eine Spitze mit vertikaler Tangente und dem Krümmungsradius* ∞; diese Tangente schneidet C_g in der Spitze nicht, wie gewöhnlich in 3, sondern in 5 Punkten. *Die Curve C_g hat jetzt keine Wendepunkte;* diese entstehen aber sofort, wenn man $n + l$ klein und positiv wählt.

9. Betrachten wir den Grenzfall, dass a der Null zustrebt. Ist $l > 0$ oder $l + n < 0$, so geht C_g in eine Cycloïde über. *Ist aber $l < 0 < l + n$ so geht C_g über in zwei cycloidale Bögen, die in E mit einer Ecke an einander stossen.* Der Teil oberhalb E ist das Spiegelbild der Fortsetzung des unterhalb E gelegenen Teils, wie Fig. 11 das zeigt. Wird a kleiner, so

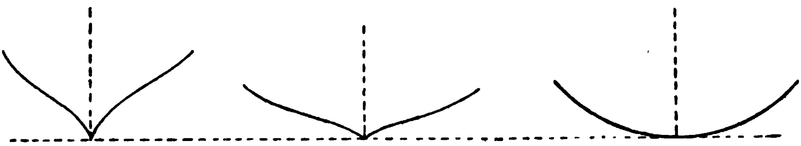
Fig 11.



wird C_g in dem Schnittpunkt mit E immer schärfer; der Krümmungsradius $a\sqrt{\frac{-l}{n+l}}$ in diesem Schnittpunkt nähert sich mit a der Null. Dennoch ist, für $a = 0$, der Krümmungsradius von C_g im Punkt $y = 0$ nicht Null, sondern $2\sqrt{n(n+l)}$ (Der Limes der Tangente und des Krümmungsradius ist nicht die Tangente und der Krümmungsradius des Limes).

Ist schliesslich $l = 0$, und lässt man a zu Null werden, so bekommt man einen Grenzübergang zur Cycloide, der in Fig. 12

Fig. 12.



ist abgebildet. *Der Krümmungsradius des tiefsten Punktes, der vor dem Limes immer gleich Null ist, wird bei dem Limes plötzlich* $2n$.

Die Umrisscurve C_u.

10. Aus den Gleichungen (5) und (12) folgt:

$$\phi = \int_l^y \sqrt{\frac{n + l - y}{(y - l)(a^2 + y^2)}} \cdot dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Das ist die Gleichung der Umrisscurve C_u in Linienkoordinaten ϕ und a. Hier ist ϕ der Winkel, den die Tangente in einem Punkte A_1 von C_u mit der X-axe bildet; y der Abstand des Schwerpunktes G_1 von dieser Tangente, positiv gerechnet, wenn bei fortgesetzter Rollung, bis A_1 Berührungspunkt mit E geworden ist, G oberhalb E zu liegen kommt. Aus (16) folgt, *dass ϕ immer mit y wächtst* (wie auch aus einer einfachen mechanischen Ueberlegung sofort klar ist), *und, wenn $a \neq 0$, endlich bleibt, auch für $y = l + n$.*

Man sieht leicht ein, dass die Curve C_u sich ins Unendliche erstreckt. Wir haben früher schon hervorgehoben, wie man aus der Schwerpunktslage G den zugehörigen Berührungspunkt A construiert (GA senkrecht auf C_g). Durchläuft G die Curve C_g von G_1 *ab*, so entfernt sich A von A_1 (auch wenn C_g convex ist, wie mechanisch sofort klar ist); ist G in der Spitze ($y = l + n$) angekommen, so ist A ins Unendliche gerückt, *sodass C_u eine Asymptote hat, die den Abstand $l + n$ von G_1 hat. Der Schwerpunkt kan also nur den Teil der Curve C_g durchlaufen, der zwischen den beiden dem Punkt $x = 0$ $y = l$ nächtsten Spitzen gelegen ist; diese Spitsen selbst werden erst für unendlich grosse Schwingungen erreicht* (also faktisch nicht erreicht).

Aus diesen Ueberlegungen folgt auch leicht eine angenäherte

Construction für die Curve C_{*}, wenn C_g gezeichnet vorliegt. Wir nehmen auf C_g einige dicht bei einander gelegene Punkte G, G′, G″ u. s. w. an, und construieren die zugehörigen Berührungspunkte A, A′, A″. Diese Punkte des Cylinders kommen, wenn er in seine Gleichgewichtslage zurück gerollt ist, nach A_1, A_1', A_1'', wahrend (siehe Fig. 1) $GA = G_1A_1$, $G'A' = G_1A_1'$ u. s. w. Liegen nun P_1, A, A′, A″ so nahe bei einander, dass man die Bogenlängen P_1A_1, A_1A_1' u. s. w. gleich P_1A, AA′ u. s. w. setzen kann, so construiert man A_1 aus $G_1A_1 = GA$, $P_1A_1 = P_1A$; A_1' aus $G_1A_1' = G'A'$, $A_1A_1' = AA'$; u. s. w.

Diese Construction wird auch durch Christiaan Hvygens in seiner genannten Handschrift, für den Fall das $a = 0$ ist, (was aber keinen wentlichen Unterschied macht) in folgenden Worten angegeben (siehe Fig. 13):

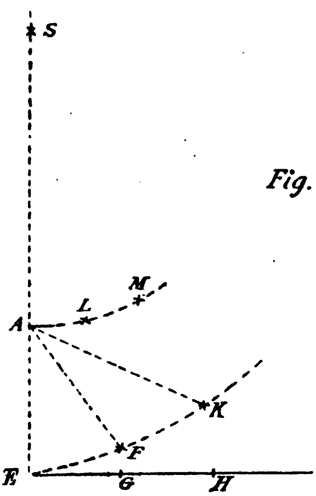


Fig. 13.

„ALM cycloides cujus axis SA. „AE = ½AS, sed et major mi„norve potest accipi. EH per„pend. AE. LG, MH cycloidi ad „ang. rectos. EF = EG, AF = LG „ita invenitur punctum F. Rur„sus FK = GH, AK = MH etc. „Curva EFK revoluta in plano „EH faciet ut punctum A volvi„tur in cycloide ALM, semise„cundorum. Pondus ergo in A „affixum, si cetera gravitate ca„rent faciet hoc modo oscillationes „isochronas." Schliesslich findet man auf einem einliegenden Blatt Papier eine sorgfältig gezeichnete Curve mit der Beischrift: „Cette „figure en roulant sur un plan fait que le point A décrit une „cycloide creuse de demisecondes."

11. Unter s verstehen wir die Länge der von dem Berührungspunkt von P_1 ab nach rechts durchlaufenen Strecke, wenn der Cylinder von seiner Gleichgewichtslage aus über E rollt im Sinne des Uhrzeigers. Also ist $R = \frac{ds}{d\phi}$ der Krümmungsradius von C_{*}, positiv gerechnet, wenn das Krümmungscentrum sich

oberhalb E befindet, wenn der betreffende Punkt Berührungspunkt geworden ist. Nun ist vermöge (8): $R = \frac{ds}{d\phi} = \frac{1}{2}\frac{d(r^2)}{dy}$, also vermöge (10):

$$R = \frac{n\,\{a^2 + 2(n+l)y - y^2\}}{2(n+l-y)^2} = \frac{n}{2}\left[\frac{a^2+(n+l)^2}{(n+l-y)^2} - 1\right] \quad . . (17)$$

Es wird R nur ∞ für $y = n + l$, und zwar $+\infty$; dann haben wir es aber mit dem unendlich weiten Punkt von C_u zu thun, *so dass C_u keine Wendepunkte hat* (wie auch mechanisch einzusehen ist). Wohl aber kann $R = 0$ werden; R wechselt dann sein Vorzeichen, nicht weil $d\phi$, sondern weil ds sein Vorzeichen, wechselt; *wir haben es also für $R = 0$ mit einer Spitze von C_u zu thun.* Das Verhalten von R ist also entscheidend für die Gestalt der Curve C_u.

Aus (17) sieht man sofort, *dass R (wenn man das Vorzeichen beachtet) immer mit y wächst. R ist also minimal in dem Berührungspunkt P_1 der Gleichgewichtslage, und wächst fortwährend (eventuell mit Passierung der Null), wenn man C_u durchläuft.*

Nennen wir R in dem Punkte P_1 ($y = l$) R_1, so ist:

$$R_1 = \frac{a^2 + l^2 + 2nl}{2n} = l + \frac{a^2 + l^2}{2n} \quad . . . . . (18).$$

Hieraus findet man für die Periode $\vartheta = 2\pi\sqrt{\frac{2n}{g}}$

$$\vartheta = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + l^2}{g(R_1 - l)}} \quad . . . . (19),$$

eine Formel, die auch für einen beliebigen Cylinder, aber dann nur für sehr kleine Schwingungen, gültig bleibt. Man liest aus (19) sofort die Bedingung der Stabilität für einen beliebigen Cylinder ab, nämlich $R_1 > l$. *Die Stabilitätsbedingung fordert also, dass in der Gleichgewichtslage das Krümmungscentrum des Cylinders oberhalb des Schwerpunkts liegt.*

Für $a = 0$ liefert (18) $2n = \frac{l^2}{R_1 - l}$, was auch für einen beliebigen Cylinder gültig ist (wenn nur $a = 0$ und n sich auf kleine Schwingungen bezieht). Dies ist die Formel, die Huygens für den Fall, dass C_u ein Kreis ist, angegeben hat (§ 4).

12. Es besteht eine einfache Beziehung zwischen den Krümmungsradien ρ und R von C_g bzw. $C_\varkappa$. Diese Beziehung geht hervor aus der allgemeineren Formel, die den Krümmungsradius ρ der Bahncurve eines Punktes P durch ρ_1, ρ_2, r und y ausdrückt. Hier ist P ein Punkt an einer Curve C_1 fest verbunden, die über eine feste Curve C_2 rollt; ρ_1 und ρ_2 sind die Krümmungsradien von C_1 und C_2 in dem Berührungspunkt A, r und y die Abstände des Punktes P von A resp. der gemeinschaftlichen Tangente in A. Diese Formel ist bekanntlich

$$\rho = r \frac{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}{\frac{y}{r^2} - \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}.$$

Hierin ist r immer positiv zu rechnen, während ρ_1, ρ_2 und y positiv sind, wenn die Krümmungscentra der beiden Curven und P an einer bestimmten verabredeten Seite der Tangente in A liegen. ρ wird positiv gerechnet in der Richtung von A nach P.

In unserem Fall ist nun $\rho_2 = \infty$, $\rho_1 = \mathrm{R}$, also bekommen wir:

$$\rho = \frac{r^3}{y\mathrm{R} - r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

woraus mittelst (10) und (17) sofort Gleichung (14) hervorgeht. Schreibt man (20) in der Form $r^2(\rho + r) = \rho\mathrm{R}y$ so sieht man, dass $\rho + r$, der Abstand zwischen A und dem Krümmungscentrum von C_g (positiv gerechnet von A nach G), das Vorzeichen von $\rho\mathrm{R}y$ hat, woraus man schliesst, dass sich der Punkt A (wie er aus der Curve C_g construiert wird) bei einer Rollung im Sinne des Uhrzeigers nach rechts oder nach links verschiebt, jenachdem R positiv oder negativ ist, ein Resultat das, wenn man an die Curve $C_\varkappa$ denkt, sofort klar ist.

Discussion der verschiedenen Gestalten von $C_\varkappa$.

13. Die Curve $C_\varkappa$ nimmt zwei verschiedene Gestalten an, jenach dem R_1 positiv oder negativ ist; im zweiten Falle hat

sie zwei Spitzen, im ersten Falle keine. Auch die Grösse von ϕ für die Asymptote, d. h. des Maximalwertes

$$\phi_m = \int_l^{l+n} \sqrt{\frac{n+l-y}{(y-l)(a^2+y^2)}} \,.\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

von ϕ hat auf die sinnfällige Form Einfluss; ϕ_m und $l+n$ bestimmen die Asymptote. Für jeden Wert von y ist ϕ kleiner als wenn $a=0$ (l und n ungeändert). C_u ist also weniger stark gewunden als für $a=0$. Für $a \neq 0$ ist ϕ_m endlich.

Ist $a=0$, so lässt sich der Ausdruck für ϕ leicht integrieren. Man findet für $l>0$

$$\phi = 2\sqrt{\frac{n+l}{l}} \,.\, \text{arc. ctg.} \sqrt{\frac{l(n+l-y)}{(n+l)(y-l)}} - 2\,\text{arc. ctg.} \sqrt{\frac{n+l-y}{y-l}}$$

also

$$\phi_m = \pi\left(\sqrt{\frac{n+l}{l}} - 1\right).$$

Für $n+l<0$ ist ebenso

$$\phi = -2\sqrt{\frac{n+l}{l}}\,\text{arc. ctg.} \sqrt{\frac{l(n+l-y)}{(n+l)(y-l)}} + 2\,\text{arc. ctg.} \sqrt{\frac{n+l-y}{y-l}}$$

also:

$$\phi_m = \pi\left(1 - \sqrt{\frac{n+l}{l}}\right)$$

(unter arc. ctg. immer den Winkel zwischen Null und $\frac{1}{2}\pi$ verstanden). Endlich ist für $l<0<n+l$ und $y<0$

$$\phi = 2\,\text{arc. ctg.} \sqrt{\frac{n+l-y}{y-l}} + 2\sqrt{\frac{n+l}{-l}} \log \frac{\sqrt{(n+l)(y-l)} + \sqrt{-l(n+l-y)}}{\sqrt{-ny}}.$$

In dem ersten Falle liegt ϕ_m zwischen Null (für l sehr gross) und ∞ (für l sehr klein und pos.) In dem zweiten liegt ϕ_m zwischen Null (für l neg. und absolut sehr gross) und π (für $n+l$ sehr klein). Im dem dritten Fall endlich wächst ϕ über alle Grenzen, wenn y sich (von der negativen Seite) der Null nähert.

Ist gleichzeitig $a=0$ und $l=0$, so ist ϕ für alle y unendlich.

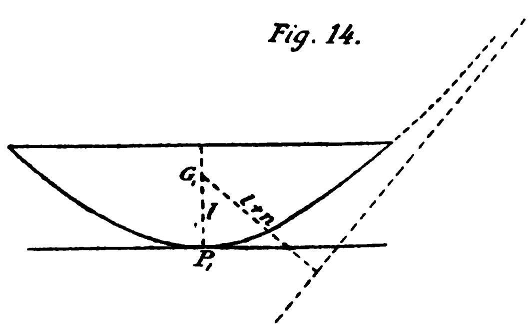
14. Betrachten wir etwas genauer den Fall, dass R_1, der Krümmungsradius von C_u in P_1, positiv ist. *Dann ist* R *immer*

positiv und wächst fortwährend und unbeschränkt, wenn wir uns von P_1 *entfernen*; weil $R = \frac{1}{2}\frac{d(r^2)}{dy}$, *so ist dasselbe auch mit* r *(dem Abstand von* G_1*) der Fall.*

Die Richtung der Asymptote wird durch ϕ_m (siehe Glg. (21)) gegeben. Ist a sehr gross, so wird ϕ_m klein, und $C_\varkappa$ verläuft flach. Ist l positiv oder negativ, so kann ϕ_m noch beliebig gross werden, wenn nur a und l sehr klein sind, aber so dass noch R_1 d. h. $a^2 + l^2 + 2nl$ oder $a^2 + 2nl$ positiv ist; für l negativ, $l + n$ positiv hat $C_\varkappa$ eine Tangente durch G_1. Für negatives $l + n$ ist eine solche Tangente nicht möglich, so dass ϕ_m immer $< \frac{1}{2}\pi$ sein muss; man kann diese Grenze noch enger ziehen; man findet nämlich, dass in dem Falle R_1 positiv, $l + n \leqq 0$, $\phi_m < \int_0^1 \sqrt{\frac{z}{(1-z)(1+z^2)}}\, dz = 0{,}3987\,\pi$ sein muss (dieser oberen Grenze nähert man sich an für $l + n = 0$, a etwas grösser als n; R ist dann positiv und klein); eine untere Grenze für ϕ_m dagegen existiert nicht.

Fällt $\phi \leqq \frac{1}{2}\pi$ aus (was immer eintritt wenn $l + n < 0$), so muss man den Cylinder noch durch eine unwesentliche Grenzfläche (worüber natürlich keine Rollung stattfinden darf) schliessen. Ist aber $\phi > \frac{1}{2}\pi$, so begrenzt die Curve $C_\varkappa$ einen geschlossenen Cylinder. *So entsteht ein Cylinder, bei dem alle endlichen Schwingungen tautochron sind, wenn die Schwingung nur nicht über die scharfe Kante hinausgeht, längs deren seine Begrenzungsfläche sich selbst durchdringt.*

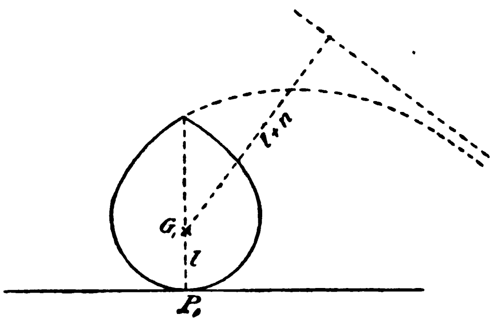
Fig. 14.



Die Figuren 14 und 15 geben die Gestalt von $C_\varkappa$ für diese beiden Fälle an; hierbij ist l positiv angenommen, was aber

unwesentlich ist. Ist l negativ, $l+n$ aber positiv, so geht

Fig. 15.



eine Tangente von C_u durch G_1; dies ist nicht der Fall für $l+n$ negativ.

15. Sei zweitens R_1 negativ (dann muss $a < n$ und $0 > l > -2n$ sein). Da für $y = l$ R negativ ist, und für $y = l + n$ $R = +\infty$, *hat* C_u *eine Spitze*, und zwar vermöge (17) für $y = n + l - \sqrt{a^2 + (n+l)^2}$, also für negatives y. *Durchläuft man* C_u *von* P_1 *ab, so nimmt r und der absolute Betrag von* R *erst ab; in der Spitze hat r ein Minimum und* R *ist Null; darauf nehmen r und* R *wieder zu, und zwar unbeschränkt.*

Ist R_1 negativ aber klein, so liegen die beiden Spitzen nahe bei P_1. Lässt man R_1 Null werden (also das y der Spitze zu l werden), so fallen schliesslich beide Spitzen zusammen, und vereinigen sich in eine höhere Singularität mit dem Krümmungsradius Null, deren Gestalt aber nichts Besonderes zeigt. Die Fig. 16 macht das deutlich.

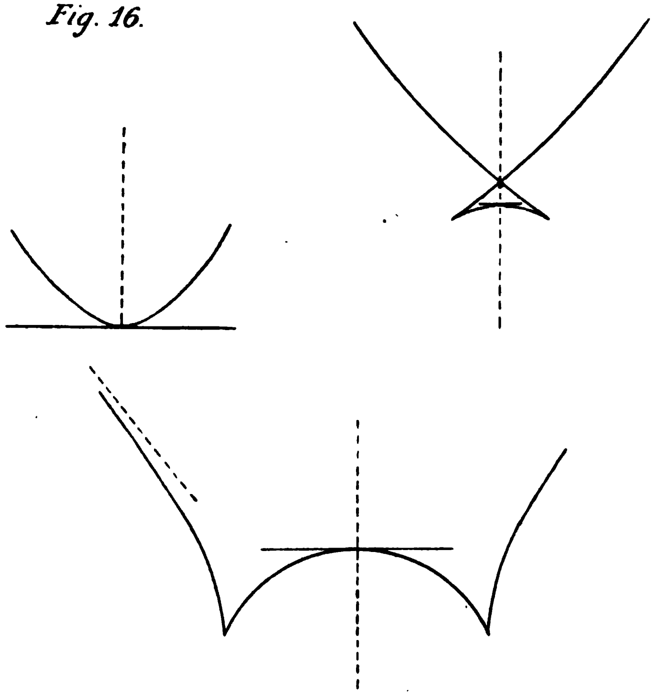
Is R_1 negativ und ebenso $l+n$, so hat C_u keine Tangente durch G_1. Der Abstand $n + l - \sqrt{a^2 + (n+l)^2}$ der Spitzentangente von G_1 ist grösser als zweimal der Abstand $n + l$ der Asymptote von G_1 (für $a = 0$ ist es genau zweimal). Man findet, dass in diesem Fall ϕ_m zwischen $\pi(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0{,}2929\,\pi$ ($a = 0$, $l + 2n$ pos. und klein; R_1 ist dann neg. und klein) und π liegt ($a = 0$, $l + n$ neg. und klein; R_1 wird dann $-\frac{1}{2}n$ und das ϕ der Spitze nahezu ϕ_m).

Ist $l + n$ pos. (l aber neg. weil $R_1 < 0$), so hat C_u eine Tangente durch G_1. Indem man a genügend klein nimmt,

kann ϕ_m so gross werden, wie man will. Es giebt aber eine untere Grenze für ϕ_m, nämlich $\int_0^1 \sqrt{\frac{z}{(1-z)(1+z^2)}}\,dz = 0{,}3987\,\pi$ ($l+n$ und $n-a$ pos. und klein; R_1 ist dann neg. und klein).

Für $l+n=0$ endlich liegt ϕ_m zwischen $0{,}3987\,\pi$ und π.

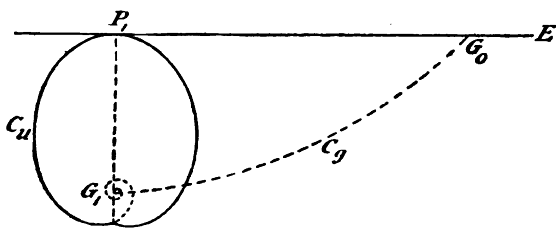
Fig. 16.



Lässt man a sich der Null näheren, während $l<0$, $l+n>0$, so näheren sich die beiden Spitzen G_1, und C_u verläuft sowohl vor wie nach der Spitze sehr viele Male um G_1 herum. *Bei dem Limes wird C_u eine Spirale mit unendlich vielen Windungen um G_1 herum, die G_1 als Grenzpunkt haben;* der Teil der Curve jenseits der Spitzen, die in den Grenzpunkt G_1 der Spirale zusammengefallen sind, scheidet sich von der Curve ab. Wir haben schon in § 13 gesehen dass, für $l+n>0>l$, ϕ über alle Grenzen wächst, wenn y sich von der neg. Seite der Null nähert; gleichzeitig nehmen dann R, und die Abstände r und y zwischen G_1 und Curvenpunkt resp. — tangente unbeschränkt ab. *Die Gesamtlänge der Spirale von P_1 bis G_1 ist*

endlich, und zwar gleich dem Abstand von P_1 bis zum Schnittpunkt G_0 der Cycloide C_g mit der Ebene E; erst wenn die ganze Spirale abgerollt ist, befindet sich G in G_0; der andere Teil von C_g, oberhalb der Ebene E, hat also keine mechani-

Fig. 17.

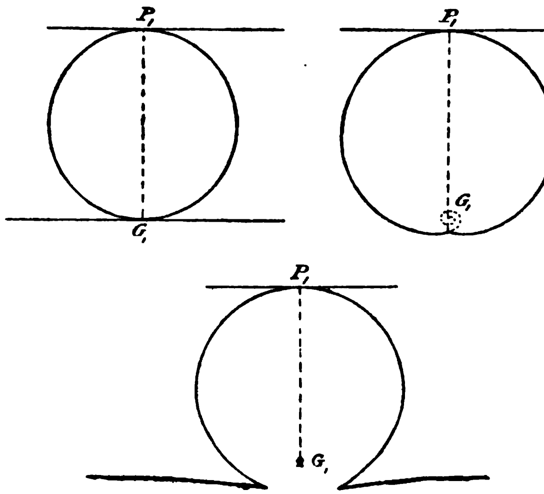


sche Bedeutung. Fig. 17 giebt die Gestalt der Curve C_u, die ganz unterhalb der Ebene E verläuft, an.

Wir haben die beiden speciellen Fälle betrachet, dass für die Spitze $y = l$ oder $y = 0$ ist; ein anderer Grenzfall tritt ein, wenn in der Spitze $y = l + n$ und also $\phi = \phi_m$ wird. Dazu muss $a = n + l = 0$ sein. Dann folgt aber aus (17), da $R = \frac{n}{2}$, also constant ist. C_u wird hier ein Kreis mit dem Durchmesser n; da $l = -n$ und $a = 0$, kann man sich alle Masse concentriert denken in einem Punkt G der unteren Erzeugenden des Kreiscylinders. Dieses Resultat war zu erwarten, weil dann G eine concave Cycloide beschreibt Der gefundene Kreis ist auf verschiedene Weisen als ein Grenzfall zu betrachten. Wir können z. B. $a = 0$ nehmen, und $n + l$ sich der Null näheren lassen. Geschieht dies von der positiven Seite, so hat C_u die Gestalt der oben beschriebenen Spirale mit unendlich vielen Windungen um G_1. *Lässt man $l + n$ Null werden, so nähert sich eine Windung (für die y nicht klein ist) einem Kreis; die andern Windungen drängen sich alle in den Punkt G_1 zusammen.* Nähert sich aber $l + n$ von der negativen Seite der Null, so nähert sich ϕ_m dem Wert π. Die Curve C_u hat dann zwei Spitzen, die sich einander und G_1 näheren; für diese Spitzen ist ϕ nur wenig kleiner als ϕ_m, so dass die Curve ausserhalb dieser Spitzen ungefähr geradlinig verläuft. Wenn y nicht wenig von $l + n$ verschieden ist, so ist R nahe zu constant, nämlich gleich $\frac{n}{2}$, *so dass sich C_u innerhalb der*

Spitzen einem Kreis nähert. Der Teil ausserhalb der Spitzen nähert sich einer Geraden und trennt sich bei dem Limes von

Fig. 18.



dem Kreis ab. Die Figur 18 veranschaulicht diese Grenzübergänge.

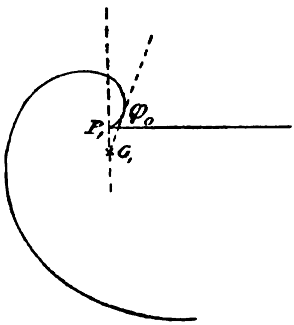
In dem Vorhergehenden haben wir unser Problem mathematisch idealisiert, indem wir zuliessen, dass die Curve $C_\varkappa$ sich selbst und die Ebene E durchdringt (was allerdings noch zu realisieren ist, wenn wir den Cylinder und die Ebene als bestehend aus schmalen Bändern betrachten). Wir haben, durch die Annahme eines negativen R_1 auch zugelassen, dass der Cylinder nicht auf E ruht, sondern an der Ebene E hängt. Passiert der Berührungspunkt die Spitze von $C_\varkappa$, so geht das Hängen in Ruhen über

16. Ein Uebergangsfall zwischen den in § 14 und 15 betrachteten Fällen hat man, wenn $R_1 = 0$, also $a^2 = -l(l+2n)$ und wieder $0 > l > -2n$. *Der Krümmungsradius* R, *der in* P_1 *Null ist, nimmt von* P_1 *an unbeschränkt zu;* ebenso r. Man findet, dass für $R_1 = 0$ ϕ_m wächst, wenn der absolute Betrag von l abnimmt. Für $l = -2n$ ist ϕ_m am kleinsten, nämlich $\phi_m = \pi(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0{,}2929\,\pi$. Lässt man dagegen l unbeschränkt abnehmen, so bekommt man eine Spirale mit

immer mehr Windungen um G_1 herum; *schliesslich wird also* C_u *eine Curve, die in* P_1 *in einer Spirale mit unendlich vielen Windungen um* P_1 *anfängt; diese Spirale hat aber eine endliche Länge*, wie man aus der Curve C_g sofort sieht.

Ist $0 < l < n$, so hat C_u eine Tangente durch G_1 $(y = 0)$.

Fig. 19.



Das ϕ für diese Tangente ist

$$\phi_0 = \int_l^0 \sqrt{\frac{n + l - y}{(y - l)(y^2 - l^2 - 2nl)}} \, . \, dy.$$

Dieser Ausdruck nimmt zu (für $0 < l < -n$), wenn der absolute Betrag von l abnimmt; für $l = -n$ ist $\phi_0 = \phi_m = 0{,}3987\,\pi$; nimmt l unbeschränkt ab (immer für $R_1 = 0$), so nähert sich ϕ_0 dem Limes $\sqrt{2} = 0{,}4501\,\pi$. *Die Tangente von* G *an die Curve* C_u *nähert sich also einem ganz bestimmten Limes*, wie das die Fig. 19 veranschaulicht.

UEBER DIE SIMULTANINVARIANTEN ZWEIER KEGELSCHNITTE,

VON

JAN DE VRIES.
(Utrecht.)

---

1. In SALMON—FIEDLER, „*Analytische Geometrie der Kegelschnitte*", 4. Auflage, S. 513, wird bemerkt, dass die Simultaninvariante Θ verschwindet falls ein in Bezug auf den Kegelschnitt S sich selbst conjugirtes Dreieck dem Kegelschnitte S′ eingeschrieben ist. Es fehlt aber der Nachweis der Umkehrung dieser Eigenschaft. Ueberdies ergibt sich bekanntlich aus $\Theta = 0$, dass S′ einfach unendlich vielen Poldreiecken von S umbeschrieben ist (vergl. z. B. CLEBSCH, *Leçons sur la géométrie*, t. I, p. 368). Ich möchte nun zeigen, wie einfach letztere Eigenschaft sich herleiten lässt.

2. Es sei P_1 irgend ein Punkt von S′, p_1 seine Polare in Bezug auf S. Die Schnittpunkte von p_1 und S′ seien mit P_2, P_3 bezeichnet.

Das in Bezug auf S sich selbst conjugirte Dreieck, welchem P_1 und P_2 als Eckpunkte angehören, werde als Coördinatendreieck gewählt. Alsdann ist an zu setzen

$$S \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

$$S' \equiv a'_{33}x_3^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + 2a'_{23}x_2x_3 + 2a'_{31}x_3x_1 = 0.$$

Nun ist

$$\Theta \equiv \Sigma A_{ik}a'_{ik} = a_{11}a_{22}a'_{33}.$$

Daher ergibt sich $a'_{33} = 0$, wenn $\Theta = 0$ ist; d. h. der dritte Eckpunkt des Coördinatendreiecks fällt mit P_3 zusammen, liegt somit auf S′.

Weil P_1 ein beliebiger Punkt van S′ ist, erhellt hieraus,

dass die Punkte von S' sich in conjugirte Tripel anordnen lassen, indem jeder Punkt *einem* in Bezug auf S conjugirten Dreieck angehört.

3. Sind zwei Kegelschnitte auf ihr gemeinschaftliches sich selbst conjugirtes Dreieck bezogen, so hat man

$$S \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$
$$S' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$
$$\Theta = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11}, \quad \Theta' = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Aus $\Theta = 0$ ergibt sich nun

$$\frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} + \frac{1}{a_{33}} = 0;$$

es verschwindet somit die Simultaninvariante Θ' der Kegelschnitte

$$S^* \equiv \frac{x_1^2}{a_{11}} + \frac{x_2^2}{a_{22}} + \frac{x_3^2}{a_{33}} = 0,$$
$$S' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

d. h. in S^* lassen sich einfach unendlich viele Poldreiecke von S' beschreiben.

Beachtet man, dass S^* die Polarfigur von S in Bezug auf S' ist, so ergibt sich sofort, dass wenn $\Theta = 0$, dem Kegelschnitt S einfach unendlich viele Poldreiseite des Kegelschnitts S' umbeschrieben sind.

Auf analoge Weise lässt sich die Bedeutung von $\Theta = 0$ für zwei quadratische Flächen ermitteln.

4. Es soll noch gezeigt werden, wie sich die geometrische Bedeutung des Verschwindens der Invariante Δ eines Kegelschnitts auf einfache Weise ergibt.

Wählt man irgend drei Punkte des Kegelschnitts als Eckpunkte eines Coördinatendreiecks, so ist

$$S \equiv 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0,$$

daher

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{vmatrix} = 2a_{12}a_{23}a_{31}.$$

Falls $a_{31} = 0$, wird

$$S \equiv 2x_2(a_{12}x_1 + a_{23}x_3) = 0;$$

wenn überdies $a_{23} = 0$ ist, ergibt sich

$$S \equiv 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Jedenfalls sagt $\Delta = 0$ also aus, dass $S = 0$ ein Geradenpaar darstellt.

R 7 b, F 2 h, 8 h

DE CENTRALE BEWEGING EN DE FUNCTIËN VAN WEIERSTRASS,

DOOR

G. SCHOUTEN.

(Delft.)

Wanneer hier de oplossing volgt van de beweging van een punt, dat gedreven wordt door een kracht, die voortdurend gericht is naar een centrum, en omgekeerd-evenredig is met de vijfdemacht van den afstand van 't punt tot het centrum, dan is dat niet alleen, omdat nu de differentiaalvergelijkingen wortels uit vierdemachtsvormen bevatten, maar vooral om de voortreffelijkheid van 't gebruik der elliptische functiën van WEIERSTRASS te doen uitkomen.

De verschillende gevallen toch, die bij dit gebruik moeten beschouwd worden, stemmen volmaakt overeen met die, welke bij de grafische methode uit een figuur worden afgelezen (*). De bewegingsvergelijkingen zijn als 't ware de analytische vertolking dier gevallen.

Wordt de massa van het bewegende punt gelijk één gesteld, dan is de krachtfunctie $U = -\frac{1}{4}\alpha r^{-4}$, wanneer α de kracht is, die op het punt werkt, als het op den afstand één van het centrum is. Is verder $\frac{1}{2}c$ de sectorsnelheid van de beweging en $\frac{1}{2}h$ de energie van het punt, dan zijn de differentiaalvergelijkingen van de beweging

$$\frac{dr}{\sqrt{(2U+h)r^2-c^2}} = \lambda\ du$$

$$\pm\, dt = \lambda r du$$

$$\pm\, d\theta = \lambda c \frac{du}{r},$$

(*) Verslagen en mededeelingen der Kon. Akad. van Wetenschappen, Afd. Natuurkunde, 3e Reeks, Deel 5.

welke we nu als volgt schrijven:

$$\left.\begin{aligned} \pm\, d\theta &= \frac{c\,dr}{\sqrt{hr^4 - c^2r^2 - \frac{1}{2}\alpha}} \\ \pm\, dt &= \frac{r^2}{c}\, d\theta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (A).$$

We stellen hierin

$$r^2 = \wp u + \wp(u - u_1) + \wp u_1,$$

waarin

$$\wp u_1 = \frac{c^2}{6h}, \text{ dus } \wp'^2 u_1 = 4\wp^3 u_1 - g_2 \wp u_1 - g_3 = 0,$$

want

$$g_2 = \frac{c^4 - 6h\alpha}{12h^2}, \qquad g_3 = \frac{c^2}{(6h)^3}(c^4 + 18h\alpha).$$

Verder is de discriminant $\Delta = \frac{1}{16}(g_2{}^3 - 27g_3{}^2)$ hier gegeven door

$$2^9 h^6 \Delta = -\,\alpha h (c^4 + 2\alpha h)^2.$$

Omdat nu

$$\sqrt{h}\,\frac{dr}{du} = \sqrt{hr^4 - c^2r^2 - \tfrac{1}{2}\alpha} = -\sqrt{h}(\wp(u + u_1) - \wp u)$$

is, gaan de differentiaalvergelijkingen (A) over in

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \wp u + \wp(u - u_1) + \wp u_1 \\ \pm\, d\theta &= \frac{c}{\sqrt{h}}\, du \\ \pm\, dt &= \frac{r^2}{c}\, d\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (B).$$

Ter integratie van deze vergelijkingen moeten achtereenvolgens de volgende gevallen onderscheiden worden.

1. $\alpha > 0$, dus de werking van het centrum afstootend.

Is $\alpha > 0$, dan is $h > 0$, $\Delta < 0$, $g_3 > 0$, zoodat $e_2 =$ de eenige bestaanbare wortel van $\wp'^2 u = 0$ ook positief is. Omdat $\wp' u_1 = 0$ is, moet $\wp u_1 = e_2 = \wp\omega_2$ gesteld worden.

De differentiaalvergelijkingen (B) zijn dus in dit geval

$$r^2 = \wp u + \wp(u - \omega_2) + \wp\omega_2$$

$$\pm\, d\theta = \frac{c}{\sqrt{h}}\, du$$

$$\pm\, dt = \frac{r^2}{c}\, d\theta.$$

Zoowel voor $u = 0$ als $u = \omega_2$ is r^2 oneindig groot, voor $u = \frac{\omega_2}{2}$ is $r^2 = 2\wp\frac{\omega_2}{2} + \wp\omega_2$. Dit is een minimum-waarde van r^2, omdat voor $u = \frac{\omega_2}{2}$ $\frac{dr}{dt} = \wp(u + \omega_2) - \wp u$ gelijk nul is.

De baan heeft dus een perihelium, en strekt zich van daar tot 't oneindige uit.

Worden θ en t gerekend van 't oogenblik af, dat het punt dat perihelium passeert, dan zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \wp u + \wp(u - \omega_2) + \wp\omega_2 \\ \theta &= \frac{c}{\sqrt{h}}\left(\frac{\omega_2}{2} - u\right) \\ \sqrt{h}\, t &= \zeta u + \zeta(u - \omega_2) + \left(\frac{\omega_2}{2} - u\right)\wp\omega_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1).$$

De baan is dus van hyperbolischen aard; de beide voerstralen naar de beide oneindige punten van de baan, die dus in de asymptotische richtingen van de baan loopen, maken onderling een hoek gelijk $\frac{c}{\sqrt{h}}\omega_2$. De asymptoten echter van de baan gaan niet door het centrum, want de snelheid op oneindigen afstand is $\sqrt{h}$, en $\sqrt{h} \times$ afstand van het centrum tot asymptoot $= c$, zoodat die afstand is $\frac{c}{\sqrt{h}} = \sqrt{6e_2}$. Verder blijkt uit de laatste bewegingsvergelijking, dat zoowel voor $u = 0$ als $u = \omega_2$ $t = \infty$ is; het punt beweegt zich dus voortdurend.

2. $\alpha < 0$ en $h < 0$, dus de werking van het centrum aantrekkend en de energie van de beweging negatief.

Nu is $\Delta < 0$, $g_3 < 0$, dus $e_2 < 0$ evenals $\frac{c^2}{6h} = \wp u_1$, zoodat ook hier $\wp u_1 = \wp\omega_2 = e_2$ gesteld moet worden.

De differentiaalvergelijkingen (B) gaan in dit geval over in

$$r^2 = \wp u + \wp(u - \omega_2) + \wp\omega_2$$

$$\pm\, d\theta = \frac{c}{\sqrt{-h}}\, diu$$

$$\pm\, dt = \frac{r^2}{c}\, d\theta.$$

Zal θ bestaanbaar wezen, dan moet u den vorm iu + standvastige aannemen; daar ook r^2 bestaanbaar moet zijn, zal voor u gesteld moeten worden $iu - \frac{\omega_2}{2}$.

De differentiaalvergelijkingen zijn dus hier

$$r^2 = \wp\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right) + \wp\left(iu + \frac{\omega_2}{2}\right) + \wp\omega_2$$

$$\pm\, d\theta = \frac{c}{\sqrt{-h}}\, du$$

$$\pm\, dt = \frac{r^2}{c}\, d\theta.$$

Voor $iu = 0$ is $r^2 = 2\wp\,\frac{\omega_2}{2} + \wp\omega_2$ en $\frac{dr}{du} = \wp\left(iu - \frac{\omega_2}{2} + \omega_2\right) - - \wp\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right) = 0$, terwijl voor $iu = \frac{\omega'_2}{2}$

$$r^2 = \wp\omega_1 + \wp\omega_2 + \wp\omega_3 = 0 \text{ is.}$$

De baan voert dus tot het centrum en heeft een aphelium op een afstand $\sqrt{2\wp\,\frac{\omega_2}{2} + \wp\omega_2}$ tot het centrum.

Worden θ en t gerekend van het oogenblik, dat het aphelium wordt gepasseerd, dan zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \wp\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right) + \wp\left(iu + \frac{\omega_2}{2}\right) + \wp\omega_2 \\ \theta &= \frac{c}{\sqrt{-h}}\, u \\ \sqrt{-h}\, t &= u\wp\omega_2 + i\left(\zeta\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right) + \zeta\left(iu + \frac{\omega_2}{2}\right)\right) \end{aligned}\right\} \ldots (2).$$

De hoek, die door den voerstraal beschreven wordt gedurende de beweging van uit het aphelium tot het centrum is $\frac{c}{\sqrt{-h}} \cdot \frac{\omega'_2}{2i}$, dus eindig, en de tijd, waarin dit geschiedt, is $\frac{1}{\sqrt{-h}}\left\{\frac{\omega'_2}{2i}\wp\omega_2 + i\zeta\omega_1 + i\zeta\omega_3\right\}$, dus ook eindig.

Het punt beschrijft dus een spiraalvormige baan, en komt met oneindig groote snelheid in het centrum aan.

3. $\alpha < 0$, $h > 0$.

Nu is $\Delta > 0$, zoodat $\wp u_1 = \frac{c^2}{6h} > 0$ gelijk gesteld moet worden aan e_1, den grootsten wortel van $\wp'^2 u = 0$, doch ook gelijk kan gesteld worden aan e_2, den middelsten wortel, zoo deze positief, dus $g_3 < 0$ is.

Uit

$$\sqrt{h}\,\frac{dr}{du} = \sqrt{hr^4 - c^2r^2 - \tfrac{1}{2}\alpha}$$

volgt, dat $\frac{dr}{du}$ voor $c^4 + 2\alpha h > 0$ nul kan worden, doch voor $c^4 + 2\alpha h < 0$ nooit. In 't eerste geval kan de baan dus een peri- of aphelium hebben, in 't tweede geval niet.

De vorm voor r^2 in (B) kan nu de volgende gedaanten aannemen:

$$r^2 = \wp u + \wp(u - \omega) + \wp\omega$$

$$r^2 = \wp(u + \omega') + \wp(u + \omega' - \omega) + \wp\omega = \wp(u + \omega') + \wp(u + \omega'') + \wp\omega$$

$$r^2 = \wp u + \wp(u - \omega'') + \wp\omega''$$

$$r^2 = \wp(u + \omega') + \wp(u + \omega' - \omega'') + \wp\omega'' = \wp(u + \omega') + \wp(u + \omega) + \wp\omega''.$$

Omdat de laatste uitdrukking voor r^2 uit de voorlaatste verkregen wordt, door hierin u in $u + \omega$ te veranderen, kan deze vorm buiten beschouwing blijven.

In de eerste uitdrukking voor r^2 is r^2 oneindig groot, zoowel voor $u = 0$ als voor $u = \omega$; voor $u = \frac{\omega}{2}$ is $r^2 = 2\wp\frac{\omega}{2} + \wp\omega$, terwijl dan tevens $\frac{dr}{du} = \wp(u + \omega) - \wp u$ voor die waarde van u gelijk nul wordt. De baan heeft dus een perihelium, zoodat $c^4 + 2\alpha h > 0$ is.

In de tweede waarde voor r^2 is voor $u = 0$

$$r^2 = \wp\omega + \wp\omega' + \wp\omega'' = 0,$$

en voor $u = \frac{\omega}{2}$ is

$$r^2 = \wp\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) + \wp\omega + \wp\left(\frac{\omega}{2} + \omega''\right) = \wp\omega + 2\wp\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right),$$

terwijl dan $\frac{dr}{du} = \wp(u + \omega' + \omega) - \wp(u + \omega') = 0$ is. De baan heeft dus een aphelium, zoodat ook hier $c^4 + 2\alpha h > 0$ is.

In den derden vorm voor r^2 eindelijk is $r^2 = \infty$ voor $u = 0$, en $r^2 = 0$ voor $u = \omega$, want dan is

$$r^2 = \wp\omega + \wp(\omega - \omega'') + \wp\omega'' = \wp\omega + \wp\omega' + \wp\omega''.$$

Omdat $\frac{dr}{du} = \wp(u + \omega'') - \wp u$ nimmer nul wordt, zal de baan geen peri- of aphelium vertoonen, en zich zoowel tot het centrum als tot het oneindige uitstrekken. Hier is dus $c^4 + 2\alpha h < 0$.

Voor $c^4 + 2\alpha h > 0$ worden dus onder dezelfde omstandigheden twee verschillende banen beschreven, een met een perihelium en van hyperbolischen aard, de andere met een aphelium en in den vorm van een spiraal, die naar het centrum voert. Waar het van afhangt, welke van deze twee banen door het punt wordt beschreven, zal straks blijken. Alleen zij opgemerkt, dat de perihelium-afstand van de eene baan $\left(\sqrt{2\wp\frac{\omega}{2} + \wp\omega}\right)$ grooter is dan de aphelium-afstand

$$\left(\sqrt{2\wp\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) + \wp\omega}\right)$$

van de tweede.

De differentiaalvergelijkingen (B) gaan dus in dit geval over in:

$$c^4 + 2\alpha h > 0$$

$a)$ $r^2 = \wp u + \wp(u - \omega) + \wp\omega$ $\quad$ $b)$ $r^2 = \wp(u + \omega') + \wp(u + \omega'') + \wp\omega$

$$\pm\, d\theta = \frac{c}{\sqrt{h}}\, du \qquad \text{en} \qquad \pm\, d\theta = \frac{c}{\sqrt{h}}\, du$$

$$\pm\, dt = \frac{r^2}{c}\, d\theta \qquad\qquad \pm\, dt = \frac{r^2}{c}\, d\theta$$

$$c^4 + 2\alpha h < 0$$

$$c) \quad r^2 = \wp u + \wp(u - \omega'') + \wp\omega''$$

$$\pm\, d\theta = \frac{c}{\sqrt{h}}\, du$$

$$\pm\, dt = \frac{r^2}{c}\, d\theta.$$

a) Worden t en θ gerekend van af het passeeren van het perihelium $\left(\sqrt{2\wp\,\frac{\omega}{2} + \wp\omega}\right)$, dan zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \wp u + \wp(u - \omega) + \wp\omega \\ \theta &= \frac{c}{\sqrt{h}}\left(\frac{\omega}{2} - u\right) \\ \sqrt{h}\, t &= \zeta u + \zeta(u - \omega) + \left(\frac{\omega}{2} - u\right)\wp\omega \end{aligned}\right\} \ldots (3_1).$$

De baan is van hyperbolischen aard, evenals in het eerste geval, en de beweging eeuwigdurend.

b) Worden θ en t gerekend van het oogenblik, dat het punt het aphelium $\left(\sqrt{2\wp\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) + \wp\omega}\right)$ van de baan passeert, dan zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \wp(u + \omega') + \wp(u + \omega'') + \wp\omega \\ \theta &= \frac{c}{\sqrt{h}}\left(\frac{\omega}{2} - u\right) \\ \sqrt{h}\, t &= \zeta(u + \omega') + \zeta(u + \omega'') + \left(\frac{\omega}{2} - u\right)\wp\omega \end{aligned}\right\} \ldots (3_2).$$

De baan is een spiraal, langs welke het punt in eindigen tijd met oneindig groote snelheid in het centrum komt.

c) De bewegingsvergelijkingen in dit geval zijn

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \wp u + \wp(u - \omega'') + \wp\omega'' \\ \theta &= \frac{c}{\sqrt{h}}\, u + \text{standv.} \\ \sqrt{h}\, t &= \zeta u + \zeta(u - \omega'') - u\wp\omega'' + \text{standv.} \end{aligned}\right\} \ldots (4).$$

De baan strekt zich uit van het centrum tot het oneindige. De beweging van het centrum af duurt altijd; die naar het centrum is eindig.

4. Het bijzondere geval $c^4 + 2\alpha h = 0$.
Dan is

$$\triangle = 0, \quad g_2 = \frac{c^4}{3h}, \quad g_3 = -\left(\frac{c^2}{3h}\right)^3,$$

dus

$$e_1 = e_2 = -\tfrac{1}{2}e_3 = \frac{c^2}{6h}, \quad \omega = \omega' = \infty,$$

en

$$\wp u = -\frac{c^2}{3h} + \rho^2\left(\frac{e^{\rho u} + e^{-\rho u}}{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}\right)^2, \quad \rho^2 = \frac{c^2}{2h},$$

$$\zeta u = -\frac{c^2}{6h}u + \rho\,\frac{e^{\rho u} + e^{-\rho u}}{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}.$$

De perihelium-afstand van (3_1) en de aphelium-afstand van (3_2) vallen samen met $\sqrt{3e_1} = \sqrt{\frac{c^2}{2h}} = \rho$.

De differentiaalvergelijkingen a) geïntegreerd in dit geval geven

$$r^2 = \wp u - e_3 \quad \text{of} \quad r = \rho\,\frac{e^{\rho u} + e^{-\rho u}}{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}$$

$$\theta = \frac{c}{\sqrt{h}}\,u + \text{standv.}$$

$$\sqrt{h}\,t = \zeta u + e_3 u = \rho^2 u + \rho\,\frac{e^{\rho u} + e^{-\rho u}}{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}.$$

De baan strekt zich eenerzijds tot het oneindige uit, anderzijds gaat ze met oneindig veel windingen asymptotisch tot den cirkelomtrek met den straal ρ (baan met asymptotischen binnencirkel). Noch die cirkel, noch het oneindige wordt ooit door het punt bereikt.

De differentiaalvergelijkingen (b) in dit geval geintegreerd, geven als bewegingsvergelijkingen

$$r^2 = \wp(u + \omega') - e_3 \quad \text{of} \quad r = \rho \frac{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}{e^{\rho u} + e^{-\rho u}}$$

$$\theta = \frac{c}{\sqrt{h}} u + \text{standv.}$$

$$\sqrt{h}\, t = \rho^2 u - \rho \frac{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}{e^{\rho u} + e^{-\rho u}} + \text{standv.}$$

De baan voert eenerzijds naar het centrum, anderzijds met oneindig veel windingen asymptotisch tot den cirkelomtrek met den straal ρ (baan met asymptotischen buitencirkel). De beweging naar het centrum duurt een eindigen tijd, die van het centrum af oneindig lang.

Deze twee gevallen kunnen ook rechtstreeks behandeld worden, aangezien de differentiaalvergelijkingen (A) nu zijn

$$\pm\, d\theta = \frac{c\,dr}{\sqrt{h}\,(r^2 - \rho^2)}$$

$$\pm\, dt = \frac{r^2}{c}\, d\theta.$$

Uit deze oplossing blijkt verder, dat de baan (3_1) of de baan (3_2) zal gevolgd worden, naarmate het punt bij het begin der beweging zich *buiten* of *binnen* den cirkel met den straal ρ bevindt.

Is eindelijk het punt bij 't begin der beweging *op* dien cirkel, dan beschrijft het dezen met eenparige beweging, omdat dan niet alleen $\frac{dr}{du}$, maar *alle* afgeleiden van r naar u gelijk nul zijn.

JOHANN WENDEL TESCH
(1840—1901).

Onder hen, die naar de mate hunner krachten tot den bloei van het Wiskundig Genootschap hebben bijgedragen, moet de naam van TESCH in de eerste plaats genoemd worden. Daarom mag in de eerste aflevering van het *Nieuw Archief*, die na zijn overlijden verschijnt, een enkel waardeerend woord zijn plaats vinden.

De uiterlijke levensomstandigheden van TESCH zijn spoedig vermeld.

Den 26sten September 1840 in de residentie geboren, verbond hij zich reeds in 1860 als onderwijzer in wiskunde aan het bekende Instituut VAN VLIET aldaar. In 1866 nam hij een benoeming aan tot leeraar in wiskunde aan de nieuw opgerichte hoogere burgerschool te Zaandam. Hoewel zijn verblijf daar van korten duur was, had het toch een beslissenden invloed op zijn levenslot, wijl het hem kennis deed maken met Mej. C. STOFFEL uit Deventer en deze kennismaking tot een gelukkig huwelijk leidde. Van 1867 tot 1878 was hij leeraar in wiskunde aan de hoogere burgerschool te Amsterdam; toen keerde hij naar zijn geboorteplaats terug om er de leiding van het Instituut, waaraan hij als onderwijzer verbonden geweest was, over te nemen. Tot Maart 1901 mocht hij hieraan zijn beste krachten wijden. En veel heeft hij voor zijne school gedaan, die aan een lagere school een inrichting verbond, welke met een driejarige hoogere burgerschool gelijk te stellen was. Toen echter openbaarde zich de kwaal, die hem moest slopen, in die mate, dat hij zich genoodzaakt zag het dagelijksch werk aan andere handen toe te vertrouwen. Een verblijf in de Scheveningsche boschjes mocht niet baten; den 3den Juli ging hij kalm heen. Bij zijne begrafenis op den 6den Juli,

J. W. TESCH.

JOHANN[illegible] EN[illegible]EL TESCH

[illegible]

Onder hen, die naar [illegible] hunner krachten tot [illegible] van het W[illegible] hebben bijgedragen [illegible] naam van TESCH [illegible] eerste plaats genoemd worden. [illegible] in de [illegible] van het Nieuw Archief, d[illegible] zijn overlijden [illegible], een enkel waardeerend [illegible] plaats vinden.

- - - -

De [illegible]jke levensomstandigheden van TESCH zijn [illegible] vermeld.

Den 26[illegible] September 1840 in de residentie geboren, [illegible] hij zich reeds in 1860 als onderwijzer in wiskunde aan [illegible] Instituut VAN VLIET aldaar. In 1866 [illegible] tot leeraar in wiskunde aan de nieuw[illegible] hoogere burgerschool te Zaandam. H[illegible]wel zijn verblijf [illegible] van kort duur was, had het toch een beslissende [illegible] op zijn levensloop, wijl het hem kennis deed maken [illegible] C. STROOBEL uit Deventer en deze kennismaking [illegible] kig huwelijk leidde. Van 1867 tot 1878 was hij [illegible] wiskunde aan de hoogere burgerschool te Amsterdam [illegible] keerde hij naar zijn geboorteplaats terug om er de [illegible] het Instituut, waaraan hij als onderwijzer verbonden [illegible] was, over te nemen. Tot Maart 1901 mocht hij [illegible] beste krachten wijden. En veel heeft hij voor [illegible] gedaan, [illegible] een lagere school een inrichting [illegible] welk[illegible] met een driejarige hoogere burgerschool gelijk[illegible] was. Toen echter openbaarde zich de kwaal, die hem [illegible], in die mate, dat hij zich genoodzaakt zag [illegible] [illegible] werk aan andere handen toe te vertrouwen. [illegible] [illegible] de S[illegible]veningsche boschjes mocht niet baten; [illegible] Juli ging hij kalm heen. Bij zijne begrafenis op den 6[illegible]

J. W. Tesch.

waar de voorzitter en andere leden van het Wiskundig Genootschap aanwezig waren, werd hem bij monde van den eersten, CORN. L. LANDRÉ, de laatste eer bewezen.

In 1863 werd TESCH lid van het wiskundig genootschap en in 1869, dus kort nadat hij inwoner van de hoofdstad geworden was, nam hij zitting in het bestuur. In het in 1874 verschenen deel der „Wiskunstige opgaven met hare ontbindingen", dat over 1870—1874 loopt en waarvan de naamlijst behalve bestuurders nog „buitengewone leden van verdienste in het wetenschappelijke vak", „buitengewone leden van verdienste in het huishoudelijke vak", „leden van verdienste eerste klasse", „leden van verdienste tweede klasse", „leden van de wetenschappelijke commissie", enz. onderscheidde, staat TESCH èn als „tweede secretaris" èn als „inspecteur der boekerij" vermeld. Dit deel bevat waarschijnlijk zijne eerste pennevruchten op wiskundig gebied, een achttal vraagstukken, waarvan er o.a. een is opgelost door H. A. LORENTZ. Doch aan het volgende deel der vraagstukken, dat onder den titel „Wiskundige opgaven met de oplossingen" een nieuwe reeks opende, zou TESCH een veel grooter aandeel hebben; in de naamlijst van dit in 1881 voltooide deel staat hij vermeld als „Redacteur der wiskundige opgaven". Dat deze betrekking toen allerminst een sinekuur was kan wel hieruit blijken, dat 64 van de 200 vraagstukken uit dit deel door TESCH zelven zijn opgegeven, van welke slechts 18 door hem aan andere tijdschriften waren ontleend. Gedurende de zes jaar, waarin dit deel in bewerking was, vloeiden nieuwe vraagstukken slechts traag toe en ook het aantal belangstellende oplossers was zeer afgenomen. Geheel in het vergeetboek geraakt scheen de aanmaning tot de leden van het genootschap gericht o.a. in den beschrijvingsbrief van de algemeene vergadering van 1865, waar het heette: „Eindelijk verzoek ik UEd. om HET OPGEVEN EN OPLOSSEN VAN VOORSTELLEN IN DE GEWONE STUKJES steeds als eene der voornaamste werkzaamheden ter beoefening en uitbreiding van wiskundige kennis, te blijven beschouwen, te willen bevorderen en aan te moedigen: het BESTUUR maakt UEd. daarom bij herhaling hierop in het Berigt van ieder Stukje opmerkzaam, noodigt UEd. dringend uit, om toch

vooral, zoo door het *inzenden van Voorstellen*, als door het *oplossen van de opgegevene Nieuwe Vraagstukken*, tot dit nuttige doel mede te werken, en alzoo de belangrijkheid en de vermenigvuldiging der gewone STUKJES te helpen bevorderen". Doch de nieuwe redacteur liet zich niet ontmoedigen. Van zijne verschillende woonplaatsen, Amsterdam (Bloemgracht MM 38 en 72, P. C. Hooftstraat 37) en 's-Gravenhage (Piet Heinstraat 1*a* en Molenstraat 53) bleef hij zijne „Nieuwe Opgaven" aan de leden rondzenden. En ongetwijfeld is het alleen aan zijne volharding toe te schrijven, dat de nieuwe reeks, waarvan thans het achtste deel in bewerking is, niet in de geboorte is gebleven; ongetwijfeld heeft zijne werkkracht toen het genootschap voor een ramp behoed.

Het zou ons te ver voeren de 64 door TESCH opgegeven vraagstukken naar de wetenschappelijke waarde te beoordeelen; bovendien hebben we aanstonds te wijzen op verdienstelijker werk. We kunnen er echter niet van afstappen zonder de aandacht te vestigen op een kenmerkenden karaktertrek, die zich er in openbaart, n.l. dezen, dat de redacteur zich zelven nooit op den voorgrond brengt. Van de 64 door hem opgegeven vraagstukken heeft hij bij slechts twee zijn eigen oplossing gepubliceerd. Bijzonder eigenaardig komt deze bescheidenheid, die TESCH kenmerkte, in het door hem aan STEINER ontleende vraagstukkendrietal 81—83 uit. Van het eerste en tweede waren oplossingen ingekomen, van het derde niet. En hoewel TESCH nu een oplossing van dit derde gevonden had, publiceerde hij die niet, omdat ze hem wat omslachtig voorkwam, en riep hij voor dit derde opnieuw de medewerking van de leden in met de toevoeging: „mocht er onverhoopt geen kortere oplossing inkomen, dan zal de redacteur de zijne geven aan het einde van dit deel"; werkelijk bevat het „aanhangsel" een oplossing van een andere hand.

Met het tweede deel der nieuwe reeks „Wiskundige Opgaven", dat van 1882 tot 1886 in bewerking was, zag TESCH zijn volharding beloond; daarin kon het aantal der door hem zelven opgegeven vraagstukken tot 23 dalen. Onder deze zijn er twee, die we nader moeten bespreken ten opzichte van hunne wetenschappelijke waarde; zij toch bevatten oorspronkelijk werk van blijvende beteekenis.

Zijn A, B, C, D de voetpunten der normalen uit een wille-

keurig punt P in het vlak van een middelpuntskegelsnee ε op deze kegelsnee neergelaten, is A′ het diametraal tegenover A gelegen punt en S het voetpunt van de loodlijn uit het middelpunt van ε op de raaklijn in A′ aan ε neergelaten, dan liggen de punten A′, B, C, D, S op een cirkel. Dit is de bekende stelling van JOACHIMSTHAL, met het punt S aangevuld door DE LONGCHAMPS. Deze stelling is echter niet omkeerbaar in dien zin, dat bij *elken* cirkel in het vlak van ε een punt P van het vlak gevonden kan worden, waarvoor deze cirkel een der vier cirkels van JOACHIMSTHAL is; immers het aantal punten P van het vlak en dus het aantal cirkels van JOACHIMSTHAL is tweevoudig oneindig, terwijl het aantal cirkels in het vlak drievoudig oneindig is. En nu heeft TESCH aan het vraagstuk, dat reeds de aandacht van zooveel bekende wiskundigen getrokken had, een uitbreiding gegeven, waardoor de aangewezen leemte wordt aangevuld. Hij is namelijk op het gelukkige denkbeeld gekomen de werkelijke normalen te vervangen door lijnen, die in het punt der kegelsnee met de raaklijn aan die kromme in dat punt in bepaalden zin een van 90° verschillenden hoek α maken, door zoogenaamde α-normalen. Zoo vond hij, dat *elke* cirkel in het vlak der kegelsnee ε deze kromme in vier punten snijdt, die bij vervanging van een van hen door het diametraal tegenover gelegen punt vier voetpunten van door een zelfde punt P gaande α-normalen opleveren en wel voor een bepaalde waarde van α, die gemakkelijk uit elk drietal der vier punten is af te leiden. Bovendien toonde hij aan, dat de door DE LONGCHAMPS gegeven uitbreiding in den meer algemeenen vorm behouden blijft in de volgende stelling: Zijn A, B, C, D de voetpunten der α-normalen — α nu gegeven gedacht — uit een punt P van het vlak van ε op deze kromme neergelaten, is A′ het diametraal tegenover A gelegen punt en S het voetpunt van de in denzelfden zin genomen α-normaal uit het middelpunt van ε op de raaklijn in A′ aan ε neergelaten, dan liggen de punten A′, B, C, D, S op een cirkel.

Vergelijkt men deze uitkomst met de boven gegeven stelling van JOACHIMSTHAL, dan springt de buitengewone eenvoudigheid van de door TESCH gegeven uitbreiding in het oog. Het denkbeeld in het algemeen normalen door α-normalen te vervangen was niet nieuw; reeds onderscheidde men naast de gewone ontwondene eener kromme, d. i. de omhullende harer normalen, de α-ontwondene, de omhullende harer α-normalen.

Wat echter nieuw is en de hoofdverdienste van TESCH uitmaakt, is de meesterlijke analytische toepassing van dit denkbeeld op de stelling van JOACHIMSTHAL, die mij indertijd dermate heeft bekoord, dat ik de verleiding niet heb kunnen weerstaan te trachten langs meetkundigen weg tot dezelfde uitkomst te geraken door in het oorspronkelijke geniale bewijs van JOACHIMSTHAL overal loodlijn door α-loodlijn te vervangen; bij de behandeling der stelling van JOACHIMSTHAL is het mij dan ook altijd een genoegen op mijne lessen de schoone vondst van TESCH te vermelden en daarbij te verwijzen naar vraagstuk 160 van deel II der wiskundige opgaven. Kenmerkend is weer het bijschrift aan de oplossing toegevoegd: „Had de steller eerst het oog op de in deze vraag gestelde voorwaarde, langzamerhand breidde de oplossing zich uit tot de hier meegedeelde beschouwing, die misschien eenige nog niet bekende eigenschappen der ellips bevat, wat tot verschooning van de ongewone lengte moge dienen.” Kan het bescheidener?

Een tweede vraagstuk, dat om zijne wetenschappelijke beteekenis der vermelding waardig is, staat eveneens met α-normalen in verband en kan in een anderen zin als eene omkeering van de door TESCH uitgebreide stelling van JOACHIMSTHAL beschouwd worden. Gaat men van drie punten A, B, C van een middelpuntskegelsnee ε uit, dan kan men altijd een hoek α vinden, waarvoor de drie α-normalen van A, B, C door eenzelfde punt P gaan. Denkt men zich nu de punten A, B, C en een hoek α gegeven, doch ε veranderlijk, dan heeft men den grondslag gevormd van vraagstuk 179. We kunnen daarbij vragen naar de meetkundige plaats van het snijpunt P dezer lijnen en die van het middelpunt M der kegelsnee, welke dan blijken kromme lijnen van den derden graad te zijn. Het merkwaardige van dit vraagstuk ligt echter hierin, dat TESCH naast de reeks van kegelsneden omgeschreven aan den coördinatendriehoek ABC een reeks van kegelsneden in dien driehoek beschreven gesteld heeft, waarbij dan de voorwaarde moet gelden, dat de voor een bepaalde waarde van α genomen α-normalen in de raakpunten dezer kegelsneden met de zijden van den coördinatendriehoek door een zelfde punt P gaan, en dan de opmerkelijke uitkomst verkregen wordt, dat voor een zelfde waarde van α zoowel de meetkundige plaats dier punten P als die van de middelpunten M in beide gevallen dezelfde wordt. Hoewel ik ook van deze beschouwingen een meetkundig pendant ge-

leverd heb, is het mij daarbij niet gelukt uit te maken, of men bij het naast elkaar stellen van de beide reeksen van kegelsneden aan een dieper inzicht in het wezen der dingen dan wel aan een bloot gelukkig toeval te denken heeft; in elk geval getuigt de meesterlijke greep van een hoogen graad van wiskundige ontwikkeling.

Was TESCH eenmaal met een onderwerp bezig, dan kon hij het moeielijk weer loslaten. Zoo is hij voor een derde maal op het normalenvraagstuk teruggekomen in een voordracht op het Natuur- en geneeskundig congres te Amsterdam in 1896; daar sprak hij over meetkundige plaatsen van punten P in het vlak eener ellips ε, voor welke de constructie der vier normalen met behulp van gemakkelijk te construeeren kegelsneden kan geschieden. Verder bevat het *Nieuw Archief voor Wiskunde* twee opstellen van zijne hand en zijn verschillende kleine bijdragen van hem opgenomen in *L'intermédiaire des mathématiciens.*

Eene aanhaling uit een aan den Heer LANDRÉ gericht schrijven moge hier een plaats vinden: „Hoe gaarne had ik u gesproken over een mijner oudste en beste leerlingen, dien ge denzelfden ochtend de laatste eer hebt helpen bewijzen. Ik bedoel J. W. TESCH. Ik spreek nu van een tijd toen ik nog veel deed aan hoogere wiskunde. Slechts eens in de week, in den winter 's morgens zeer vroeg nog bij lamplicht, gaf ik hem les, hoofdzakelijk in de hoogere algebra. Daar zijn leerlingen van wie de onderwijzer zelf leert; tot dezen hoorde TESCH. Ik ondervond, dat TESCH een scherpen doordringenden blik had en een geboren mathematicus was. Ik stelde zooveel belang in hem, dat ik zijn examen middelbaar onderwijs bijwoonde. TESCH had niet veel moed. Tegelijk met hem legde iemand examen af, die reeds naam had op wiskundig gebied. Ik sprak TESCH moed in en voorspelde, dat hij wel zou slagen en de ander niet. En mijn voorspelling werd bewaarheid."

Als medewerker aan de „*Revue semestrielle*" stond TESCH de redactie trouw ter zijde. Van de oprichting af aan leverde hij de analyse van het tijdschrift „*Mathesis*" en van eenige andere publicaties. Aan de samenstelling der eerste vijfjaarlijksche tabel had hij een werkzaam aandeel door de „table des auteurs" voor zijne rekening te nemen. Ook bij de samenstelling der achter iedere aflevering verschijnende naamlijst was hij tot kort voor zijn dood behulpzaam.

In TESCH verliest het Wiskundig Genootschap van Amsterdam een volijverig, behulpzaam en bescheiden medelid en de Nederlandsche wetenschap een talentvol wiskundige, wiens naam met eere moet worden genoemd. Zijn asch ruste in vrede.

P. H. SCHOUTE.

BIBLIOGRAPHIE.

Lezioni di Calcolo Infinitesimale. Lessen over differentiaal- en integraalrekening gegeven aan de Koninklijke Universiteit te Bologna door Dr. CESARE ARZELÀ. Deel 1, stuk 1. Een deel in 8°, 433 blz. Florence, Successori Le Monnier, 1901.

De titels der hoofdstukken en paragraphen zijn:

1. Limieten (getal- of puntgroepen, hulpstelling van DARBOUX, enz.)

2. Functies (bepaalde integralen, eigenschappen van bepaalde integralen, doorloopendheid van functies, ondoorloopendheid, integralen als functies harer veranderlijke bovenste grens, doorloopendheid van de som, het product, enz. van doorloopende functies, algemeene eigenschappen van over een geheele tusschenruimte doorloopende functies, tweede stelling van het gemiddelde).

3. Oneindig kleinen (oneindigheden).

4. Afgeleiden en haar beteekenissen (maxima en minima, aangroeiende en afnemende functies, afgeleiden van een integraal, afgeleiden van elementaire functies, omgekeerde functies).

5. Differentialen.

6. Stelling der middenwaarde.

7. Onbepaalde integralen (berekening eener bepaalde integraal met behulp van de onbepaalde integraal, stellingen met betrekking tot de afgeleiden en de onbepaalde integralen van sommen, producten, quotiënten van functies. Integratie bij gedeelte, functies van functies, integratie door substitutie).

8. Integratie van rationale functies (ontbinding van een rationale breuk in elementaire breuken, integratie van irrationeele differentialen, integratie van transcendente differentialen).

9. Integralen van functies met oneindigheidspunten.

10. Integralen over een oneindige tusschenruimte.

11. Lengte van bogen van krommen.

12. Opeenvolgende afgeleiden en diffirentialen (de formule van TAYLOR afgekort).

13. Uitdrukkingen, die zich onder een onbepaalden vorm voordoen.

14. Maxima en minima.

15. Reeksen van functies. Gelijkmatige convergentie. Doorloopendheid en integreerbaarheid eener reeks. Machtreeksen.

16. Reeksen van TAYLOR en van MACLAURIN.

Uit deze inhoudsopgaaf kan blijken, dat differentiaal- en integraalrekening gezamenlijk behandeld worden in dit gedeelte, dat aan de behandeling van functies met één veranderlijke is gewijd. Het tweede stuk van dit eerste deel zal op dezelfde wijs de theorie der functies met twee en meer veranderlijken ontwikkelen. Een tweede deel zal gewijd zijn aan de meetkundige toepassingen en in verband hiermee aan de differentiaalvergelijkingen en de variatie-rekening. S^{e}.

Leerboek der Mechanica met vele opgeloste vraagstukken en opgaven door J. VAN DER BREGGEN, Civiel-Ingenieur, Leeraar M. O. te Winterswijk. Een deel in 8^{0}, 192 blz., 120 fig. Prijs *f* 2,25. Groningen, P. Noordhoff, 1901.

Dit leerboek is naar onze meening een uitstekende handleiding bij het onderwijs aan hoogere burgerscholen. Wat de theorie aangaat, bereikt het wat zonder behulp van differentiaal- en integraalrekening te bereiken is; bovendien bevat het een groote reeks van met zorg gekozen uitgewerkte vraagstukken. Het centimeter-gram-seconde-stelsel is er in opgenomen.

Natuurlijk zijn er wel aanmerkingen te maken van ondergeschikt belang, die bij de verschijning van een tweeden druk van nut kunnen zijn. Zoo op de lijn MD van de titelfiguur, die loodrecht op BH behoort te staan, op de *twee* formules (50) zie blz. 175 en blz. 178, op de γ van fig. 63 die a moet zijn, enz. Het is echter onnoodig deze hier op te geven. Want als de schrijver zelf zijn leerboek gebruikt bij zijn onderwijs, zal het hem gemakkelijk vallen desnoods met behulp van zijn leerlingen deze drukfouten in zijn eigen exemplaar te verzamelen.

De uitvoering is goed, de figuren zijn over het algemeen goed geteekend. Alleen is het niet duidelijk, waarom in fig. 35 niet gestippeld is, wat door het vlak V van het eene koppel wordt bedekt. S^{e}.

Oplossing van Vraagstukken uit de Analytische

Meetkunde van het platte vlak en der ruimte, voorkomende in „BRIOT et BOUQUET, Lecons de géométrie analytique", benevens een gelijk aantal vraagstukken ter oefening door D. J. KORTEWEG, hoogleeraar te Amsterdam. Derde druk, vermeerderd en bewerkt door Dr. W. A. WYTHOFF. Een deel in 8°, 192 blz. 's Hertogenbosch, W. C. van Heusden, 1901.

Bij deze nieuwe bewerking van de bekende „Oplossingen", waarvan de eerste druk in 1872, de tweede in 1880 verscheen, is de zestiende door APPELL bezorgde editie van BRIOT en BOUQUET's handboek gevolgd, dat zich, dank zij zijne voortreffelijke eigenschappen, in een telkens weer op de hoogte van zijn tijd gebrachten vorm blijft handhaven.

Voor de eerste maal strekt deze verzameling zich ook over ruimtevraagstukken uit. Teneinde echter omvang en prijs van het werkje niet te zeer te verhoogen heeft Dr. WYTHOFF zich daarbij beperkt tot de eerste reeks vraagstukken der aan de ruimte gewijde afdeeling en tot het eerste zestal van elk der beide daarop volgende reeksen. S^e.

E. FOURREY. Récréations arithmétiques. Een deel in 8°, 261 blz. Parijs, Nony en Co., 1899.

Dit werkje is verdeeld in drie deelen. Het eerste handelt over de abstrakte getallen (merkwaardige eigenschappen van getallen, rekenkundige eigenschappen van getallen, rekenkundige bewerkingen, reeksen, polygonaalgetallen, vierkanten, kuben, deelers, verschillende vraagstukken over getallen), het tweede ontwikkelt de toepassingen (dagen der week, gedachte getallen te raden, oude vraagstukken, merkwaardige of luimige vraagstukken), het derde is geheel gewijd aan toovervierkanten (vorming, verschillende vormen en vervorming). S^e.

Tychonis Brahe Dani die XXIV octobris a. d. MDCI defuncti operum primitias de nova stella summi civis memor denuo edidit regia societatis scientiarum Danica. Insunt effigies et manus specimen Tychonis. Een met bijzonder veel zorg bewerkt boekdeel in klein 4°, XVI + 138 blz., met een beeldtenis van TYCHO naar een penteekening, fijn van lijnen, die volgens sommigen aan den hollandschen graveur GOLTZIUS, volgens anderen aan den Augsburger schilder GEMPERLIN wordt toegeschreven, en een photografische afdruk van een handschrift van TYCHO (n°. 10932 van de keizerlijke bibliotheek van Weenen). Kopenhagen, 24 October 1901.

Behalve BRAHÉ's „de nova stella", waarvan het oorspronkelijke 1573 bij Laurentius Benedicti te Kopenhagen verscheen en in dezen vorm voorzoover bekend nog slechts vijf exemplaren bestaan, bevat dit prachtwerk een Proœmium behelzende de geschiedenis van het ontstaan der nieuwe uitgaaf, een bladzij corrigenda en een woord aan den deenschen lezer. S^e.

Der Hammer-Fennel'sche Tachymeter-Theodolit und die Tachymeterkippregel zur unmittelbaren Lattenablesung von Horizontaldistanz und Höhenunterschied. Beschreibung und Anleitung zum Gebrauch des Instruments und erster Genauigkeitsversuche von Dr. E. HAMMER, Professor an der K. technischen Hochschule in Stuttgart. Een brochure in 4^0, 52 blz., 2 pl. Stuttgart, K. Wittwer, 1901.

Deze instrumenten kunnen den landmeter en waterpasser goede diensten bewijzen. Volgens de door den schrijver uitgewerkte voorbeelden wordt een afstand van 250 meter tot op omstreeks een halve meter en het hoogteverschil over dien afstand bij een helling van omstreeks 7° tot op eenige centimeters nauwkeurig bepaald. S^e.

Ueber die Geometrieen, in denen die Graden die Kürzesten sind. Inaugural-Dissertation van GEORG HAMEL. Een brochure in 8^0, 92 blz. Göttingen, Dietrich, 1901.

De schrijver zoekt de *algemeenste* meetkunde, waarin rechte lijnen de kortste lijnen zijn; deze omsluit, behalve de euclidische meetkunde, ook verschillende soorten der niet-euclidische meetkunde, die door KLEIN, HILBERT en MINKOWSKI zijn behandeld. Dit algemeene vraagstuk is bovendien daarom belangrijk, dat het de oplossing geeft van een bijzonder geval van het omkeeringsvraagstuk der variatierekening: gegeven een bepaalde differentiaalvergelijking; gevraagd een probleem der variatierekening, waarvan deze vergelijking de vergelijking van LAGRANGE is. S^e.

De projectieve meetkunde en hare grondleggers, door Dr. H. DE VRIES. Toespraak, gehouden den 9 October 1901, bij de opening zijner lessen in de Projectieve Meetkunde aan de Universiteit te Amsterdam. Een brochure in 8^0, 30 blz. Amsterdam, H. G. van Dorssen, 1901.

Korte, lezenswaardige geschiedenis van de ontwikkeling der meetkundige onderzoekingen van de oudste tijden tot op heden.

S^e^.

La Fonction Gamma; Theorie, Histoire, Bibliographie, par MAURICE GODEFROY. Een deel in 8°, 88 blz. Prijs 3 fr. 50. Parijs, Gauthier Villars, 1901.

De gammafunctie door EULER gedefinieerd als een integraal, werd door GAUSS beschouwd als de limiet van een product, dat later door WEIERSTRASS in een eenigszins anderen vorm werd gebracht. De schrijver van het bovenstaand werkje neemt de definitie van GAUSS als uitgangspunt, ontwikkelt de bekende, maar vooral ook de minder bekende, eigenschappen van $\Gamma(x)$ en geeft tot op zekere hoogte een zeer volledig overzicht van alles, wat thans aangaande $\Gamma(x)$ bekend is.

De duidelijkheid en helderheid laat niet te wenschen over. Vooral zijn op prijs te stellen de talrijke bibliographische aanwijzingen en de mededeelingen aangaande minder bekende onderzoekingen, die niet zoozeer de gammafunctie betreffen, maar waartoe toch de gammafunctie aanleiding heeft gegeven. Een alphabetische tafel aan het einde vergemakkelijkt het naslaan.

Kl.

J. BOUSSINESQ. Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. Tome I. Problèmes généraux. Een deel in groot 8°, XVI, 333 p. Parijs, Gauthier-Villars, 1901.

Gelijk de titel uitdrukt en de schrijver in een uitvoerige inleiding nader uiteenzet, wordt in dit boek de analytische theorie der warmtegeleiding op een nieuwen grondslag gevestigd. De vooral door FOURIER ontwikkelde behandelingswijze gaat uit van de destijds algemeen aangenomen voorstelling der warmte als een soort elastische vloeistof, wier drukverschillen door ons als temperatuurverschillen worden waargenomen. Thans weet men, dat de warmte een vorm van energie is, energie van onregelmatige bewegingen der moleculen of van trillingen in den ether. De temperatuur, aangevende de gemiddelde intensiteit der bewegingen, heeft alleen beteekenis voor een eindige ruimte, niet meer voor een enkel molecuul. Het is dus niet overbodig na te gaan, of de grondstellingen van FOURIER en zijn opvolgers thans blijven bestaan. Dit is

evenwel den schrijver niet voldoende; hij wenscht ook de stralende warmte en in het bijzonder den overgang daarvan in ponderabele lichamen, de absorptie of zooals hij het noemt, de *condensatie* der warmte mechanisch te verklaren; dit voert tot de opstelling van een atomistische ethertheorie. We zullen van deze denkbeelden een kort overzicht geven; als geheel verdienen ze zeker de aandacht der physici, al zullen velen tegen sommige punten bezwaar maken.

Eerst wordt in hoofdstuk I het beginsel van het behoud van arbeidsvermogen voor de behandeling van de warmteproblemen geformuleerd, dan in hoofdstuk II de warmte-energie verdeeld in kinetische en potentieele. De warmtestroom door een oppervlak wordt gedefinieerd als de arbeid der moleculaire krachten tusschen moleculen aan weerszijden van het oppervlak, en aangetoond, dat de stroomen naar beide zijden gelijk zijn en tegengesteld teeken hebben. Het volgende hoofdstuk brengt de ethertheorie, waaruit de golfbeweging zal worden afgeleid. Volgens de inleiding ziet de schrijver den voortgang der wetenschap in de geleidelijke vervanging van verklaringen uit *eigenschappen* of *toestandsveranderingen* door die uit *vorm* en *beweging*; hij ziet daarom tamelijk laag neer op de electromagnetische lichttheorie, die zich van dergelijke „mysterieuse" toestandsveranderingen bedient. Zijn ether bestaat dus uit kleine deeltjes „poussière atomique", waartusschen dezelfde krachten werken als tusschen de deeltjes die de ponderabele stof samenstellen. Van deze krachten, te weten physische aantrekking (*geen* gravitatie) en afstooting, en chemische aantrekking en afstooting, optredende bij steeds kleiner afstanden in de gegeven volgorde, houden de beide laatsten elkaar in evenwicht in de moleculen (uit *zeer vele* „atomen" samengesteld); de tweede en derde daarentegen bewaren het evenwicht tusschen de atomen, die den ether vormen. Uit deze onderstellingen worden dan de karakteristieke eigenschappen van den ether (geringe weerstand tegen *langzame* bewegingen, groote elasticiteit bij transversale trillingen van zeer korte periode en ontbreken van elasticiteit voor longitudinale trillingen) afgeleid. De theorie der transversale trillingen, die nu volgt, is evenwel van de speciale onderstellingen vrijwel onafhankelijk.

Het vierde hoofdstuk behandelt de voortplanting van golven in doorschijnende stoffen. Naar analogie van den weerstand, dien een vaste bol aan een trillende vloeistof biedt, wordt een

weerstand van de moleculen tegen de trilling van den ether ingevoerd evenredig met de *versnelling* der etherbeweging. Dit voert tot een bewegingsvergelijking

$$\rho(1 + a) \frac{d^2\delta}{dt^2} = \mu \frac{d^2\delta}{dx^2},$$

welke zich alleen door de a van de vergelijking in den vrijen ether onderscheidt. Voor doorschijnende stoffen kan a niet groot zijn; volgens den schrijver eischt dit, dat de verhouding der intermoleculaire ruimte tot het volume der moleculen zeer (énorme) groot is. We merken op, dat dit met de uitkomsten der kinetische gastheorie slecht overeen te brengen is. Van de moeilijkheid uit FRESNEL's theorie: een veranderde dichtheid bij onveranderde elasticiteit te moeten aannemen, is men door het optreden der „schijnbare" dichtheid $\rho(1 + a)$ bevrijd.

Wordt a groot, of kunnen de moleculen door de werking der elastische krachten trillingen uitvoeren van dezelfde periode als die van de warmte-golven, dan gaat deze afleiding niet door. De behandeling van dit geval der athermane lichamen in het volgende hoofdstuk bepaalt zich tot het bewijs, dat dan evenmin ethergolven als golfbewegingen van trillingen der ponderabele stof kunnen bestaan, het laatste o. a. omdat de golflengte daarbij veel kleiner zou zijn dan de afstanden of zelfs de afmetingen der moleculen. Toch krijgen de afzonderlijke moleculen amplituden vergelijkbaar met die van de ethertrilling; hun energie zal dus veel grooter zijn (per volume-eenheid) dan die van de ethertrillingen: de warmte is *gecondenseerd*, maar wordt in onregelmatige bewegingen omgezet.

In het zesde hoofdstuk wordt als maat van de intensiteit der warmtebeweging de uitzetting gekozen, die het gevolg is van een nieuw evenwicht tusschen de physische aantrekking, die *toeneemt* bij verwijdering, en de physische afstooting, die in veel sterkere mate toeneemt bij nadering. De keuze van een standaard-lichaam voert tot het begrip temperatuur.

Hiermede is de grondslag voor de behandeling der warmtestrooming verkregen De drie volgende hoofdstukken behandelen de continuiteit der stroomingen en het verband met het temperatuurverval, eerst algemeen, dan in isotrope of symmetrische stoffen. Door aan den ether aan het oppervlak van een lichaam de temperatuur toe te kennen van het lichaam, nadat evenwicht bereikt is, kan men dezelfde vergelijkingen ook tot

de oppervlakken uitstrekken. Die temperatuur van den ether heeft evenwel alleen beteekenis, zoo de straling volkomen diffuus is. Achtereenvolgens worden afgeleid de verschillende ellipsoïden, aangevende bijv. de geleidbaarheid in de richting van het temperatuurverval of die in de richting van den warmtestroom. In het tiende hoofdstuk wordt dit toegepast op staafjes, plaatjes en kristallen.

Tot hiertoe had alles betrekking op den toestand op een enkel oogenblik. De invoering van den tijd t als nieuwe ververanderlijke voert voor een ruimte ω met oppervlak σ tot de vergelijking

$$\int_\omega C \frac{du}{dt} d\omega = \int_\sigma F_n d\sigma + \int_\omega \varphi \, d\omega ,$$

waar C voorstelt de soortelijke warmte, u de temperatuur, F_n den normalen warmtestroom en φ de warmte in het inwendige uit den ether gabsorbeerd of uit andere energievormen ontstaan. Straling aan het oppervlak en convectie worden samengesteld tot uitwendige geleidbaarheid, die de grensvoorwaarden van het vraagstuk regelt. Het bewijs van het bestaan van een *enkele* bepaalde oplossing, in het bijzonder in de beide hoofdgevallen van afkoeling bij een ondoordringbaar oppervlak, en eindtoestand bij constante uit- en inwendige warmtetoevoer neemt het grootste deel van het twaalfde hoofdstuk in. In het volgende wordt aangetoond, hoe het algemeene probleem theoretisch tot deze beide bijzondere terug te brengen is, indien men den aanvangstoestand en den lateren warmtetoevoer weet te ontleden in „elementaire verwarmingen", welke elk op zich zelf een onafhankelijk aandeel tot den eindtoestand leveren. Betrekkelijk eenvoudig wordt dit zoo de verwarming periodiek is; in dat geval nadert de eindtoestand zelf tot een periodieke.

De algemeene behandelingswijze is hiermede aangegeven. De nu volgende vijf hoofdstukken bevatten de toepassing, grootendeels overeenkomstig FOURIER, op de verwarming der aarde en de afkoeling bij ring, bol, kubus en cylinder.

Een laatste hoofdstuk bevat o. a. nog een analogie van de warmtestroomen met de beweging van een vloeistof in een poreus medium; aan de hand van de daaruit af te leiden theorie der warmte als vloeistof wordt nog eens gewezen op de moeilijkheden, die tegen deze opvatting pleiten.

E. VAN EVERDINGEN JR.

DEMONSTRATION DIRECTE DE LA FORMULE DE STIRLING

PAR

L. U. H. C. WERNDLY.
(Utrecht).

On trouve dans le recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal de Frenet — voir le 439[ième] problème :

$$-\frac{\pi}{2}\,l\,.\,2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,.\,\sin\,.\,x\,.\,dx,$$

d'où l'on tire, en appliquant le théorème du produit infini du sinus :

$$-\frac{\pi}{2}\,l\,.\,2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,.\,x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,.\left(1-\frac{x^2}{1^2\,.\,\pi^2}\right)dx+$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,.\left(1-\frac{x^2}{2^2\,.\,\pi^2}\right)dx+\,\ldots\,.+\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,.\left(1-\frac{x^2}{n^2\,.\,\pi^2}\right)dx+\mathrm{R}.$$

Or, on évalue facilement la première de ces intégrales partielles :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,.\,x\,.\,dx=\pi\,(\tfrac{1}{2}l\,.\,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}l\,.\,\pi).$$

Les intégrales suivantes, au nombre de n, s'évaluent selon la formule :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,.\left(1-\frac{x^2}{k^2\,.\,\pi^2}\right)dx=\pi\left[\left(k+\frac{x}{\pi}\right)l\,.\left(k+\frac{x}{\pi}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(k-\frac{x}{\pi}\right)l\,.\left(k-\frac{x}{\pi}\right)-\frac{2x}{\pi}-\frac{2x}{\pi}\,l\,.\,k\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi\,[(k+\tfrac{1}{2})\,l\,.\,(k+\tfrac{1}{2}) - (k-\tfrac{1}{2})\,l\,.\,(k-\tfrac{1}{2}) - 1 - l\,.\,k],$$

en y posant tout simplement $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$. Quant à la quantité R, on a

$$R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,.\left(1 - \frac{x^2}{(n+1)^2\pi^2}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,.\left(1 - \frac{x^2}{(n+2)^2\pi^2}\right) dx + \ldots + $$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,.\left(1 - \frac{x^2}{(n+m)^2\pi^2}\right) dx. \qquad \{m = \infty\}$$

Dans cette expression x est tout au plus de même ordre que π; donc, si on suppose n assez grande, pour qu'on puisse négliger les puissances de $\frac{1}{n}$ à partir de $\left(\frac{1}{n}\right)^4$, on peut remplacer l'égalité précédente par:

$$R = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\,.\,dx}{(n+1)^2\pi^2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\,.\,dx}{(n+2)^2\pi^2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\,.\,dx}{(n+3)^2\pi^2} - \ldots\ldots -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\,.\,dx}{(n+m)^2\pi^2}. \qquad \{m = \infty\}$$

$$= -\frac{\pi}{24}\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+m)^2}\right] = -\frac{\pi}{24}\,.\,S.$$

Il est évident, que la série infinie S est absolument convergente; donc, si ses termes sont partagés réiterativement en trois autres (dont deux disparaissent chaque fois), elle se réduit ainsi:

$$S = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots\ldots \text{ad inf.}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \ldots\ldots \text{ad inf.} -$$

$$- S_1 = \frac{1}{n} - S_1;$$

$$S_1 = \frac{1}{n(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)^2} + \ldots \text{ ad inf.}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \ldots \text{ ad inf.}\right] +$$

$$+ S_2 = \frac{1}{2n(n+1)} + S_2,$$

et ainsi de suite; on trouve à la fin:

$$S = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{3n(n+1)(n+2)} - \frac{1.2}{4n(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots -$$

$$- \frac{m!}{(m+2)\,n(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1}.$$

$$\{m = \infty\}$$

$$= \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^4} - \ldots\right] - \left[\frac{1}{3n^3} - \frac{3}{3n^4} + \ldots\right] -$$

$$- \left[\frac{2}{4n^4} - \ldots\right] - \left[\ldots\right.$$

Maintenant on pourra ranger les termes suivant les puissances descendantes de n aussi loin qu'on voudra; toutefois nous ne prendrons que les deux premiers termes, renonçant aux autres, de crainte que le terme du troisième ordre ne soit modifié par les termes sommés du quatrième ordre, que nous venons de négliger dans le développement du logarithme.

Par suite $S = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$.

Substituant dans l'équation primitive toutes les valeurs, ainsi déduites, on trouve la relation:

$$-\frac{\pi}{2}\,l.2 = \pi(n+\tfrac{1}{2})\,l.(n+\tfrac{1}{2}) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\,l.\pi - \pi.n -$$

$$- \pi[l.1 + l.2 + l.3 + \ldots + l.(n-1) + l.n] - \frac{\pi}{24n} + \frac{\pi}{48n^2},$$

ce qui, par quelques réductions simples, revient à:

$$l.(n!) = \tfrac{1}{2}l.2\pi - n + (n+\tfrac{1}{2})l.(n+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} - \frac{1}{24n} + \frac{1}{48n^2}.$$

Ensuite on fait addition de $0 = (n+\tfrac{1}{2})l.n - (n+\tfrac{1}{2})l.n$, de sorte, qu'on trouve:

$$l.(n!) = \tfrac{1}{2}l.(2\pi.n) + n.l.n - n + (n+\tfrac{1}{2})\times$$
$$\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{24n^3} - \ldots\right) - \tfrac{1}{2} - \frac{1}{24n} + \frac{1}{48n^2} =$$
$$= \tfrac{1}{2}l.(2\pi.n) + n.l.n - n + \frac{1}{12n} + \frac{0}{n^2} + \ldots.$$

C'est à dire:

$$n! = \sqrt{2\pi.n}.n^n.e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2}\ \ldots\right),\ q.e.d.$$

On pourrait aussi se baser sur l'équation:

$$-\frac{\pi}{2}l.2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l.\cos.x.dx,\ \left\{\text{au lieu de} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l.\sin.x.dx.\right\}$$

mais alors, procédant d'une manière parfaitement analogue au calcul démontré ci-dessus, ou trouverait:

$$1.3.5.7\ldots(2n-1) = 2^{n+\frac{1}{2}}.n^n.e^{-n}\left(1 - \frac{1}{24n} + \frac{1}{1152n^2}\ldots\right),$$

et pour parvenir ainsi à la formule de Stirling, il faudrait recourir au théorème de Wallis, en supposant que n crût infiniment.

UEBER EINE EINFACHE ERZEUGUNGSWEISE DER GEWÖHNLICHEN LEMNISCATE,

VON

H. DE VRIES.
(Haarlem.)

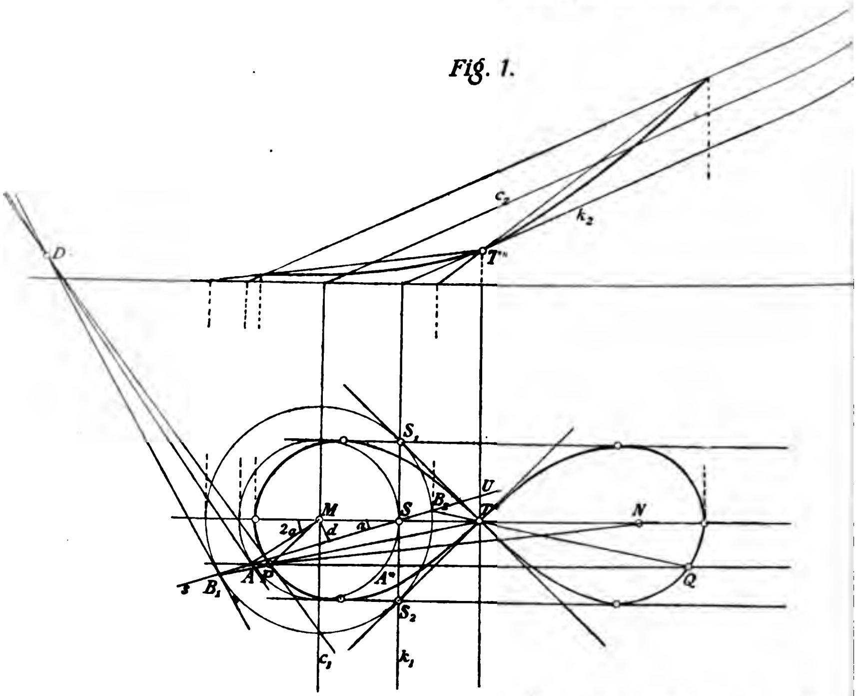
1. Die Lehre von den Kegeldurchdringungen führt auf einfache Weise zu der nachstehenden, rein planimetrischen Erzeugungsweise der gewöhnlichen Lemniscate aus Punkten und Tangenten:

„Man beschreibe um einen beliebigen Punkt M als Mittel„punkt zwei concentrische Kreise mit den Radien r und $r\sqrt{2}$, „wähle sodann auf dem kleineren der beiden Kreise einen be„liebigen Punkt S (Fig. I) und bestimme auf der Gerade MS „den Punkt T′ derart dass S die Mitte werde zwischen M „und T′. Nun ziehe man durch S eine beliebige Gerade s, „welche den inneren Kreis ausser in S noch in einem zweiten „Punkte A, den äusseren aber in den beiden Punkten B_1 und „B_2 treffen möge, lege sodann durch A eine Parallele zu der „Gerade MT′ und verbinde B_1 und B_2 mit T′; dann ist der „Ort der Schnittpunkte P, Q der beiden Geraden $T'B_1$, $T'B_2$ „mit der genannten Parallele durch A eine gewöhnliche Lem„niscate, welche den Punkt T′ zum Doppelpunkte und den „Punkt M und seinen symmetrischen N in Bezug auf T′ zu „Brennpunkten hat. Und die Tangente in irgend einem der „construirten Punkte, etwa P, erhält man als die Verbindungs„linie dieses Punktes mit dem Schnittpunkte D der beiden „Kreistangenten in denjenigen Punkten A und B_1 aus denen „P hervorgegangen ist."

Die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich aus folgenden Betrachtungen: es ist die gewöhnliche Lemniscate vollständig bestimmt durch die Eigenschaft eine bicirculare Curve vierter

Ordnung zu sein mit zwei zu einander senkrecht stehenden Symmetrieachsen, während der Schnittpunkt dieser Achsen für die Curve ein Doppelpunkt ist und die Tangenten in diesem Punkte unter sich rechte Winkel, und also zufolge der Symmetrie mit den Achsen Winkel van 45° einschliessen; und es ist nun leicht mit einem quadratischen Kegel und einem ebensolchen Cylinder eine solche Disposition zu treffen dass etwa die horizontale Projection ihrer Durchdringungscurve allen diesen Bedingungen genügt. Dazu gehen wir aus von einem quadratischen Cylinder mit kreisförmiger, in der horizontalen Bildebene gelegener, Leitcurve (der innere Kreis der Fig. I), und wählen der Einfachheit halber die Erzeugenden dieses Cylinders

Fig. 1.



parallel der Aufrissebene, sodass ihre Grundrisse parallel der Projectionsachse werden, während die Neigung ihrer Aufrisse gegen diese Achse keinerlei Beschränkung unterliegt. Nun wird bekanntlich die Durchdringung zweier quadratischer Oberflächen von irgend einem Centrum aus projicirt als eine ebene Curve vierter Ordnung mit zwei scheinbaren Doppelpunkten, deren stets reelle Verbindungslinie als die

Projection (aus dem nämlichen Centrum) derjenigen Gerade des Raumes erscheint in welcher die beiden Polarebenen des Centrums in Bezug auf beide Oberflächen sich schneiden; das Projectionscentrum nun für den Grundriss ist der Punkt Z_∞; sollen also die beiden cyklischen Punkte der Grundrissebene für die Projection unserer Durchdringung die beiden scheinbaren Doppelpunkte sein, so muss in erster Linie die Leitcurve des Kegels ebenfalls kreisförmig sein (der äussere Kreis der Fig. I), und überdies muss die Schnittlinie der Polarebenen des Centrums Z_∞ in Bezug auf den Cylinder und den Kegel unendlich entfernt sein, damit ihr Grundriss die beiden cyklischen Punkte der horizontalen Bildebene verbinde; wir haben also dafür Sorge zu tragen dass diese beiden Polarebenen parallel werden. Dann aber muss der Kegel weiter so gewählt werden dass seine Spitze T auf dem Mantel des Cylinders liegt, damit nämlich dieser Punkt für die Durchdringung selbst, und also sein Grundriss T′ für den Grundriss derselben ein Doppelpunkt werde. Und endlich müssen die Tangenten im Doppelpunkte T so beschaffen sein dass ihre Grundrisse am Punkte T′ einen rechten Winkel einschliessen.

Allen diesen Bedingungen wird nun dadurch genügt dass man auf der Parallele durch M zur Projectionsachse den einen Schnittpunkt S mit der Leitcurve des Cylinders fixirt, den Grundriss T′ der Kegelspitze auf dieser Gerade derart wählt dass S in der Mitte liegt zwischen M und T′, den zugehörigen Aufriss T″ auf der untersten Erzeugende des Cylinders annimmt, und nun endlich als Leitcurve des Kegels den Kreis um M vom Radius $r\sqrt{2}$ einträgt, wenn r der Radius der Cylinderleitcurve ist. Es ist nämlich die Polarebene des Punktes Z_∞ in Bezug auf den Cylinder die vertical projicirende Ebene $c_1 c_2$ durch M; soll nun die Polarebene des nämlichen Punktes in Bezug auf den Kegel mit der Ebene $c_1 c_2$ parallel sein, so muss ihre verticale Spur $k_2 // c_2$ sein, und also mit der verticalen Projection der Cylindererzeugende durch T zusammenfallen, während ihre horizontale Spur $k_1 // c_1$ sein muss; diese horizontale Spur ist aber die Polare des Punktes T′ in Bezug auf die Leitcurve des Kegels, diese letztere muss also so bestimmt werden dass sie als Polare des Punktes T′ die Gerade k_1 ergibt. Allein sie muss noch einer weiteren Bedingung genügen; wenn man nämlich die Berührungsebene des Cylinders

längs der durch T gehenden Erzeugende, also die Ebene $k_1 k_2$, mit dem Kegel schneidet, so erhält man die beiden Tangenten im Doppelpunkte T der Durchdringung, deren Grundrisse wie wir wissen einen rechten Winkel einschliessen sollen; man erhält diese Grundrisse indem man die Schnittpunkte von k_1 mit der Leitcurve des Kegels mit T′ verbindet, also müssen diese Schnittpunkte S_1 und S_2 so gewählt werden dass $SS_1 = SS_2 = ST'$ sei, und es muss die Leitcurve des Kegels die beiden Geraden $T'S_1$, $T'S_2$ in S_1 und S_2 berühren, was eben geschieht wenn sein Mittelpunkt in M liegt; und weil nun $SS_1 = SS_2 = ST' = SM = r$, so ist der Radius dieses Kreises $r\sqrt{2}$. Schliesslich erhellt noch dass die Ebene durch die Gerade MT′ parallel der Aufrissebene für die ganze Raumfigur eine Ebene orthogonaler Symmetrie, und also der Aufriss der Durchdringung ein Teil eines Kegelschnittes sein muss, der in T″ die Gerade k_2 berührt, während für den Grundriss die Gerade MT′ eine Achse orthogonaler Symmetrie wird.

Durch die bisherigen Anordnungen haben wir nun sämtlichen Bedingungen genügt bis auf einer; es fragt sich nämlich ob der Grundriss unsrer Durchdringung nun auch symmetrisch ist in Bezug auf die durch T′ senkrecht zur Gerade MT′ gezogene Achse. Dies ist aber in der That der Fall, denn wenn wir nun dazu übergehen die Durchdringung wirklich zu construieren, so haben wir das Hülfsebenenbüschel zu betrachten dessen Scheitelkante die durch T gehende Erzeugende des Cylinders ist, welche im Punkte S ihren ersten Durchstosspunkt hat, und dessen Ebenen also die Grundrissebene in den Strahlen s des Strahlenbüschels um S schneiden.

Trifft nun ein solcher Strahl die Cylinderleitcurve ausser in S noch in A, und diejenige des Kegels in B_1 und B_2, so hat man durch A den Grundriss der diesen Punkt enthaltenden Cylindererzeugende, also die Parallele durch A zu MT′, zu legen, und diese zu schneiden mit den Geraden $T'B_1$, $T'B_2$, womit dann die beiden Punkte P und Q des Grundrisses erhalten werden; weil aber die Gerade $S_1S_2 = k_1$ die Polare des Punktes T′ in Bezug auf den äussern Kreis, und also die Gerade durch T′ senkrecht zu MT′ die Polare des Punktes S ist, so ist $(B_1B_2SU) = -1$, und wenn man diese vier harmonischen Punkte aus T′ auf die Parallele durch A zu MT′ projicirt, so erhält man P, Q, den unendlich fernen Punkt, und

den Schnittpunkt der beiden Geraden UT′ und PQ, der also in der Mitte liegen muss zwischen P und Q, woraus sich ergibt dass unsre Curve in der That auch in Bezug auf die Achse UT′ symmetrisch ist. Auch aus der Construction der verticalen Projection der Durchdringung ergibt sich die Symmetrie des Grundrisses in Bezug auf die Achse UT′ wie leicht zu sehen unmittelbar; während schliesslich noch zu bemerken ist dass der Grundriss jeder Cylindererzeugende die Curve ausser in den Punkten P und Q noch in zwei anderen Punkten schneidet, deren Construction aus der Bemerkung hervorgeht dass die nämliche Gerade auch den Grundriss der durch den Punkt A^* gehenden Cylindererzeugende enthält; lässt man also die Spur s der zur Construction erforderlichen Hülfsebene durch A^* gehen, so erhält man die beiden der Erzeugende durch A^* entsprechenden Punkte der Durchdringung. Überhaupt kann man sich die ganze Lemniscate noch auf andere Weise entstanden denken, nämlich als das Erzeugniss zweier einander in bestimmter Weise zugeordneter Strahlsysteme, des Parallelstrahlenbüschels dessen Strahlen alle die Richtung von MT′ haben, und des Strahlenbüschels am Scheitel T′, dessen Strahlen $T'B_1$, $T'B_2$ überdies noch eine symmetrische Involution mit den Doppelstrahlen T′M, T′U bilden.

Jedem Strahle des Parallelstrahlenbüschels entsprechen, wie wir bereits wissen, 4 Strahlen durch T′; umgekehrt sind jedem Strahle durch T′ zwei Strahlen des Parallelenbüschels zugeordnet, sodass zwischen beiden Büscheln eine (4,2) Verwandtschaft besteht. Aber dem gemeinsamen Strahle MT′ beider Büschel entsprechen, wenn man ihn zum Parallelenbüschel rechnet, der Strahl MT′, doppelt gezählt, und die beiden Strahlen $T'S_1$, $T'S_2$, und wenn man ihn zum andern Büschel zählt, wiederum der Strahl MT′, doppelt gezählt; an Stelle einer Curve 6^er^ Ordnung, mit einem 4-fachen Punkte in T′ und einem Doppelpunkte im unendlich entfernten Punkte von MT′ erhält man also die Gerade MT′, doppelt gezählt, und eine Curve 4^er^ Ordnung mit einem Doppelpunkte in T′.

Dass diese Curve bicircular ist erhellt wenn man die unendlich ferne Gerade der Ebene auffasst als einen Strahl des Parallelenbüschels und nun die 4 entsprechenden aufsucht; dann hat man diese Gerade mit der Cylinderleitcurve zu schneiden, was in den cyklischen Punkten geschieht, diese

mit S zu verbinden, die 4 Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Leitcurve des Kegels zu bestimmen, und diese endlich mit T′ zu verbinden. Allein von diesen 4 Schnittpunkten sind zwei die cyklischen Punkte selbst, sagen wir C_1 und C_2; und wenn nun C_1S die Leitcurve des Kegels noch in S_1, C_2S dieselbe noch in S_2 schneidet, so gehen, weil T′ auf der Polare von S in Bezug auf diese Leitcurve liegt und die cyklischen Punkte in Bezug auf MT′ symmetrisch liegen, die Geraden S_1C_2 und S_2C_1 gerade durch T′, d.h. die 4 der unendlich fernen Gerade entsprechenden Strahlen $T'C_1$, $T'C_2$, $T'S_1$, $T'S_2$ fallen paarweise zusammen; und hieraus ergibt sich sofort dass C_1 und C_2 Doppelpunkte des Erzeugnisses sind.

Es wird nun nach dem Obigen wohl überflüssig sein zu bemerken dass die eingangs gegebene Tangentenconstruction der Lemniscate nichts anderes ist als die allgemeine Construction der Tangente in einem Punkte irgend einer Projection der Durchdringung zweier quadratischer Kegel.

2). Wir beweisen nun dass die Punkte M und N die Brennpunkte der Lemniscate sind indem wir auf elementarplanimetrischem Wege zeigen dass für jeden Punkt P der Curve das Product PM.PN einen unveränderlichen Wert hat, nämlich $T'M^2$ oder $T'N^2$ oder $4r^2$. Zu diesem Zwecke wollen wir den Winkel α einführen den die Gerade s mit der Gerade MT′ einschliesst, sowie die senkrechte Entfernung d des Punktes M von dieser Gerade. Es ist dann, weil die Radien der beiden Kreise r und $r\sqrt{2}$ sind:

$$B_1A = \sqrt{2r^2 - d^2} - \sqrt{r^2 - d^2} \quad , \text{ und}$$
$$B_1S = \sqrt{2r^2 - d^2} + \sqrt{r^2 - d^2} \quad , \text{ und}$$
$$B_1A : B_1S = AP : ST' = AP : r \quad , \text{ folglich:}$$
$$AP = r\,\frac{B_1A}{B_1S} = \frac{r^3}{B_1S^2}\,,$$

denn $B_1A.B_1S$ ist die Potenz des Punktes B_1 in Bezug auf den inneren Kreis, und also gleich r^2.

Es ist nun der am Punkte M anliegende Aussenwinkel des $\triangle$ SMA $= 2\alpha$, somit auch der $\angle$ PAM $= 2\alpha$, und folglich:

$$MP^2 = MA^2 + AP^2 - 2MA.AP.\cos 2\alpha \quad , \text{ oder}$$
$$MP^2 = r^2 + r^2\,\frac{B_1A^2}{B_1S^2} - 2\frac{r^4}{B_1S^2}\cdot\frac{r^2 - 2d^2}{r^2} \quad , \text{ oder}$$

$$MP^2 = \frac{r^2}{B_1S^2}\Big(3r^2 - 2d^2 + 2\sqrt{(2r^2 - d^2)(r^2 - d^2)} + 3r^2 - 2d^2 -$$

$$- 2\sqrt{(2r^2 - d^2)(r^2 - d^2)} + 4d^2 - 2r^2\Big)$$ oder endlich:

$$MP^2 = \frac{4r^4}{B_1S^2} = 4r \cdot \frac{r^3}{B_1S^2} = MN \cdot AP \text{ , also:}$$

$$AP : MP = MP : MN.$$

Es ist nun aber in den beiden Dreiecken APM und PMN $\angle APM = \angle PMN$, während soeben gezeigt wurde dass die diese Winkel einschliessenden Seiten proportional sind; es sind also diese beiden Dreiecke ähnlich, und daraus ergibt sich:

$$\angle MPN = \angle PAM = 2\alpha.$$

Schliesslich haben die beiden Dreiecke MAN und MPN gleichen Inhalt; der des erstern ist $\frac{1}{2}$ MA.MN. sin 2α, und der des zweiten $\frac{1}{2}$ PM.PN. sin 2α, also ist:

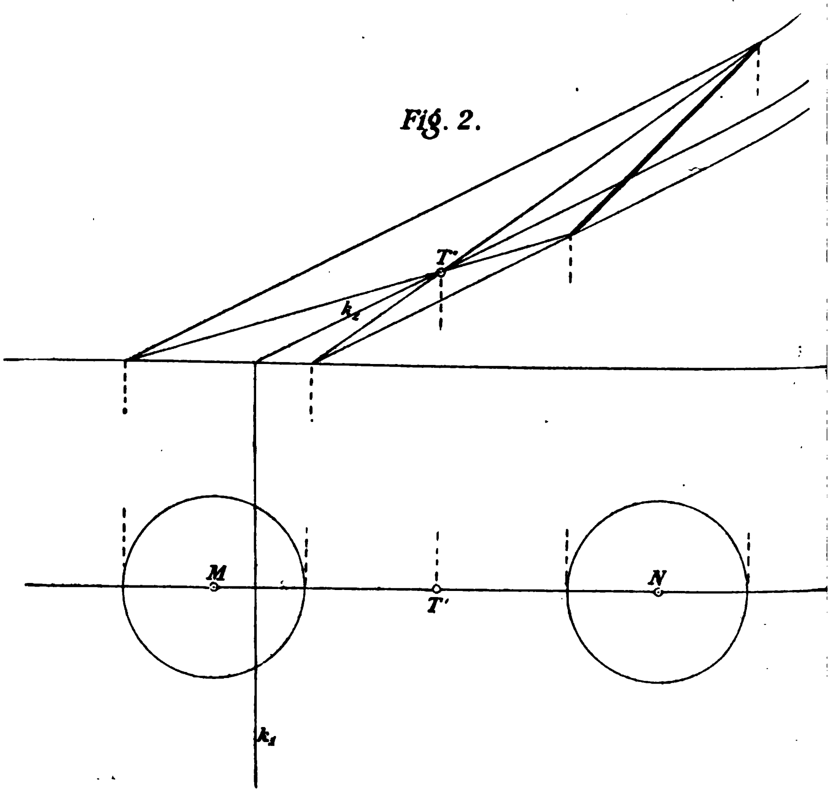
$$PM.PN = MA.MN = 4r^2 \text{ . q.e.d.}$$

3). Es muss nun zunächst bemerkt werden dass die von uns getroffene Anordnung der Figur allerdings die einfachste, aber nicht die einzig mögliche ist; es ist nämlich nicht nötig dem Punkte T' gerade die Entfernung r von S zu geben, sondern diese Entfernung ist im Gegenteil beliebig. Nimmt man T' auf der Gerade MS anderswo an, womit dann natürlich auch die Punkte T'', S_1 und S_2 ihre Lage ändern, so ist es immer noch möglich den Leitkreis des Kegels so zu bestimmen dass er in den Punkten S_1 und S_2 die Geraden $T'S_1$, $T'S_2$ berührt, nur wird er dann nicht mehr mit der Leitcurve des Cylinders concentrisch sein. Da aber trotzdem sämtlichen Bedingungen der Aufgabe genügt wird, so wird auch jetzt wieder eine gewöhnliche Lemniscate entstehen, und es ist also die im Anfang gegebene Erzeugungsweise dieser Curve einer der jetzigen Disposition entsprechenden Verallgemeinerung fähig, aber keiner der beiden nun getrennten Kreismittelpunkte wird jetzt noch ein Brennpunkt der Curve sein.

Und schliesslich liegt die Frage nahe ob die jetzige Construction nicht auch die allgemeine Lemniscate hervorzubringen erlaubt; dem ist aber nicht so. Allerdings wird, wenn man den Punkt T etwa auf der Verticale zur Grundrissebene hinauf- oder hinunterrücken lässt, die Polarebene des Punktes Z_∞ in Bezug auf den Kegel parallel sich selbst mit verschiebt, und

die Leitcurve des Kegels wiederum so construirt dass die horizontale Spur k_1 der Polarebene die Polare des Punktes T′ in Bezug auf diesen Kreis wird, was nun auf unendlich viele Arten möglich ist, weil der Kreis die Spur k_1 nun nicht mehr in bestimmten Punkten zu schneiden braucht, der Grundriss der Durchdringung ein mehr oder weniger lemniscatenähnliches Aussehen erhalten, nämlich in beiden Fällen aus zwei

Fig. 2.



getrennten, jedes für sich in Bezug auf die horizontale Achse MT′, und beide zusammen auch in Bezug auf UT′ symmetrischen Ovalen bestehen, aber diese beiden Ovale bilden zusammen keine Lemniscate. Man sieht dies am einfachsten wenn man (Fig. II) den Punkt T allmählich so weit hinaufrücken lässt bis die Gerade k_1 mit der Polare von T′ in Bezug auf den Leitkreis des Cylinders zusammenfällt; dann

nämlich kann man die Leitcurve des Kegels mit derjenigen des Cylinders zusammenfallen lassen, und besteht die ganze Durchdringung aus diesem gemeinsamen Kreise und einer Ellipse, deren Grundriss notwendig ein mit dem erstern in Bezug auf UT′ symmetrischer Kreis sein muss. Das System zweier Kreise aber kann nie einen Specialfall einer allgemeinen Lemniscate bilden.

R 7 f, F 2 h, 8 h

DE MATHEMATISCHE SLINGER EN DE FUNCTIEN VAN WEIERSTRASS,

DOOR

G. SCHOUTEN.

(Delft.)

De beweging, die een punt onder de werking van zijn gewicht uitvoert, als het gedwongen is zonder wrijving over een bolоppervlak te bewegen, m. a. w. de beweging van een mathematischen slinger, is door gebruikmaking van de functien van Weierstrass in vergelijkingen te brengen, die door hare eenvoudigheid en doorzichtigheid op verrassende wijze gunstig afsteken bij die, gevonden met gebruikmaking van de functien van Legendre (zie o a. Durège, Ellipt. Functionen).

Beginnen we met den vlakken slinger, waarbij dus het punt zich over een vertikalen grooten cirkel van den bol beweegt.

Is l de lengte van den slinger en θ de hoek, dien ze op zeker oogenblik t van de beweging met de vertikaal maakt, dan geeft het beginsel van arbeidsvermogen de volgende differentiaalvergelijking van de slingerbeweging:

$$\tfrac{1}{2}l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - gl\cos\theta = k$$

waarbij de massa van 't punt als eenheid van massa wordt aangenomen. k stelt hierin de totale energie voor. Wordt de energie, beantwoordende aan de valhoogte l als eenheid aangenomen, dan is $\frac{k}{gl} = h$ het aantal eenheden van de energie der slingerbeweging.

Bovenstaande differentiaalvergelijking is dan onder den volgenden vorm te brengen:

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = h + \cos\theta.$$

Wordt hierin

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = 1 - 2x$$

gesteld, dan gaat ze over in

$$\pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 2(h+3)x^2 + 2(h+1)x}}.$$

De elliptische functien van Weierstrass worden nu ingevoerd door te stellen:

$$x = \wp u + \frac{h+3}{6}$$

waardoor de differentiaalvergelijking overgaat in

$$\pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = du$$

met de invarianten

$$g_2 = \frac{h^2+3}{3},\; g_3 = \frac{h(h^2-9)}{27},$$

zoodat de discriminant Δ gegeven wordt door

$$16\Delta = g^3_2 - 27g^2_3 = (h^2-1)^2.$$

Wordt nog

$$\frac{h+3}{6} = -\wp a$$

gesteld, dan blijkt

$$\wp'^2 a = 0$$

te zijn, zoodat $\wp a = \wp\omega' = e_3 =$ de kleinste wortel van $\wp'^2 u = 0$ moet genomen worden, omdat $\wp a = -\dfrac{h+3}{6}$ onder alle omstandigheden waaronder de beweging kan plaats hebben ($h \geqq -1$) negatief is.

De bewegingsvergelijkingen van de slingerbeweging zijn dus

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = \wp u - \wp\omega'$$

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = u + \text{standv.}$$

Omdat echter $\sin^2 \frac{1}{2}\theta$ niet negatief en niet grooter dan 1 mag worden, moet $\wp(u)$ door $\wp(\omega' + u)$ vervangen worden. Rekent men den tijd van de beweging te beginnen met $u = 0$, dan zijn de bewegingsvergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2 \frac{1}{2}\theta = \wp(u+\omega') - \wp\omega' \\ t\sqrt{\frac{g}{l}} = u\end{array}\right\} \text{(A)}.$$

Discussie van deze formules.

Omdat

$$\wp\omega + \wp\omega' + \wp\omega'' = 0, \quad \wp\omega\, \wp\omega'\, \wp\omega'' = \tfrac{1}{4} g_3, \quad \wp\omega' = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} h$$

is, zijn

$$\wp\omega + \wp\omega'' = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} h, \quad \wp\omega\, \wp\omega'' = -\frac{h(h-3)}{18},$$

zoodat voor $\wp\omega$ en $\wp\omega''$ de waarden $\frac{1}{3}h$ en $\frac{3-h}{6}$ genomen moeten worden.

Is $h > 1$, dan moet

$$\wp\omega = \tfrac{1}{3}h, \quad \wp\omega'' = \tfrac{1}{2} - \frac{h}{6}, \quad \wp\omega' = -\tfrac{1}{2} - \frac{h}{6}$$

genomen worden, omdat $\wp\omega > \wp\omega'' > \wp\omega'$.

Voor $h < 1$ is

$$\wp\omega = \tfrac{1}{2} - \frac{h}{6}, \quad \wp\omega'' = \tfrac{1}{3}h, \quad \wp\omega' = -\tfrac{1}{2} - \frac{h}{6}.$$

Bijgevolg:

$$h > 1, \quad \wp\omega'' - \wp\omega' = 1,$$

$$h < 1, \quad \wp\omega'' - \wp\omega' = \frac{h+1}{2} < 1.$$

De bewegingsvergelijkingen (A) geven dus voor $h > 1$ aan, dat het punt volle wentelingen maakt, omdat voor $u = 0$, $\theta = 0$, voor $u = \omega$, $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \wp\omega'' - \wp\omega' = 1$, dus $\theta = 180°$ is. De duur T voor een volle wenteling bedraagt

$$T = 2\omega \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Voor $h < 1$ geven (A) te kennen, dat het punt slingeringen maakt, omdat voor $u = 0$, $\theta = 0$ is, en voor $u = \omega$, $\sin^2 \frac{1}{2}\theta = \wp\omega'' - \wp\omega' = \frac{h+1}{2} < 1$ is. De slingertijd T is

$$T = 2\omega \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Bijzondere gevallen voor $\Delta = 0$.

De discriminant Δ is gelijk nul, zoowel voor $h = +1$ als $h = -1$.

Voor $h = 1$ is

$$p\omega' = -\tfrac{2}{3},\ p\omega = p\omega'' = \tfrac{1}{3},\ \text{dus } \omega = \omega'' = \infty.$$

De vergelijkingen (A) geven $T = \infty$ en voor de eindwaarde van $\sin^2 \frac{1}{2}\theta$ de eenheid. Het punt beweegt zich naar het hoogste punt van de baan als asymptotisch punt.

Voor $h = -1$ is

$$p\omega' = p\omega'' = -\tfrac{1}{3},\ p\omega = \tfrac{2}{3},\ \text{dus } \omega' = \omega'' = \infty.$$

Dus

$$pu = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi u}{2\omega}} - \tfrac{1}{3}\right).$$

Bijgevolg

$$p\omega = \tfrac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \tfrac{2}{3},\ 2\omega = \pi,$$

zoodat de slingertijd nadert tot

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

als de amplitudo θ nadert tot nul.

Gaan we nu over tot de beschouwing van den spherischen slinger.

Maakt weer op zeker oogenblik t van de beweging de slinger een hoek θ met de vertikaal, en is φ de hoek, dien dan het vlak, bepaald door den slinger en de verticaal, maakt met een vast verticaalvlak, dan levert het beginsel van energie de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}l^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - gl\cos\theta = k,$$

terwijl dat van de sectoren geeft

$$\tfrac{1}{2}l^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} = m.$$

k is weer de totale energie van den slinger, terwijl m de sectorsnelheid is (van de beweging geprojecteerd op een horizontaal vlak). Wordt weer als eenheid van energie genomen

die, welke overeenkomst met de valhoogte l, en tot eenheid van sectorsnelheid, die welke het punt verkrijgt, als het uit den horizontalen grooten cirkel vallende, in het laagste punt gekomen is, dan stelt in

$$\frac{k}{gl} = h, \; \frac{2m^2}{gl^3} = C^2$$

h de energie, C de sectorsnelheid voor.

Bovenstaande differentiaalvergelijkingen kunnen nu als volgt worden geschreven:

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = h + \cos\theta - \frac{C^2}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = C\sqrt{\frac{2g}{l}}\,\frac{1}{\sin^2\theta}.$$

Wordt in de eerste van deze

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta = 1 - 2x$$

gesteld, dan gaat ze over in

$$\pm\, dt\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 2(h+3)x^2 + 2(h+1)x - \frac{1}{2}C^2}}.$$

Door hierin

$$x = \wp u + \frac{h+3}{6}$$

te stellen, gaat ze over in

$$\pm\, dt\sqrt{\frac{g}{l}} = du$$

met de invarianten

$$g_2 = \frac{h^2+3}{3}, \; g_3 = \frac{h(h^2-9)}{27} + \tfrac{1}{2}C^2.$$

Wordt nog

$$\frac{h+3}{6} = -\wp a, \text{ dus } \wp'^2 a = -\tfrac{1}{2}C^2$$

gesteld, dan komen de differentiaalvergelijkingen onder den volgenden vorm:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = \wp u - \wp a$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, dt = du$$

$$d\varphi = C\sqrt{2}\,\frac{du}{\sin^2\theta}$$

of ook, als

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\wp u - \wp a} - \frac{1}{\wp u - (\wp a + 1)}\right)$$

geschreven wordt, en

$$\wp a + 1 = \wp b = \frac{3-h}{6}, \text{ dus } \wp'^2 b = -\tfrac{1}{2}C^2$$

gesteld wordt:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = \wp u - \wp a$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, dt = du$$

$$d\varphi = \tfrac{1}{4}C\sqrt{2}\left(\frac{du}{\wp u - \wp a} - \frac{du}{\wp u - \wp b}\right).$$

Ter integratie van deze vergelijkingen zij opgemerkt, dat de discriminant Δ positief moet zijn. Ware Δ toch negatief, dan zouden onder de bestaanbare waarden van $\wp u$ oneindig groote voorkomen, zoodat een beweging onder $\Delta < 0$ niet kan plaats hebben.

De discriminant moet dus positief zijn. In dit geval moet $\wp u$ door $\wp(u+\omega')$, $\wp a$, die steeds negatief is, door $\wp ia$, en $\wp b$ door $\wp(\omega + ib)$ vervangen worden.

Omdat eindelijk $\wp'^2 ia = \wp'^2(\omega + ib) = -\tfrac{1}{2}C^2$ is, kan $\tfrac{1}{2}C\sqrt{2}$ vervangen worden zoowel door $i\wp ia$ als door $-i\wp'(\omega + ib)$.

De differentiaalvergelijkingen zijn dus

$$\operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\theta = \wp(u+\omega') - \wp ia$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, dt = du$$

$$2d\phi = \frac{i\wp' ia}{\wp(u+\omega') - \wp ia} + \frac{i\wp'(\omega+ib)}{\wp(u+\omega') - \wp(\omega+ib)}.$$

De integraalvergelijkingen zijn derhalve

$$\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\theta = \wp(u+\omega') - \wp ia$$

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = u + \text{standv.}$$

$$2i(\phi + \text{standv.}) = l\,\frac{\sigma(u+\omega'+ia)}{\sigma(u+\omega'-ia)}\cdot\frac{\sigma(u+\omega'+ib)}{\sigma(u+\omega'-ib)} - 2(\zeta ia + \zeta(\omega+ib))u.$$

Worden voor $u=0$, $t=0$ en $\phi=0$ genomen, dan zijn de bewegingsvergelijkingen:

$$\text{Sin}^2\tfrac{1}{2}\theta = \wp(u+\omega') - \wp ia$$

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = u$$

$$2i\phi = l\,\frac{\sigma(u+\omega'+ia)}{\sigma(u+\omega'-ia)}\cdot\frac{\sigma(u+\omega'+\omega+ib)}{\sigma(u+\omega'-\omega-ib)}\cdot\frac{\sigma(\omega'-ia)}{\sigma(\omega'+ia)}\cdot\frac{\sigma(\omega'-\omega-ib)}{\sigma(\omega'+\omega+ib)} - 2u(\zeta ia + \zeta(\omega+ib)).$$

Uit deze vergelijkingen leert men:

1°. De uiterste amplitudines van den slinger worden gegeven door

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\theta_1 = \wp\omega' - \wp ia\ ,\quad \sin^2\tfrac{1}{2}\theta_2 = \wp\omega'' - \wp ia\,,$$

welke beide uitdrukkingen positief en kleiner dan de eenheid zijn; want $\wp\omega'' < \wp(\omega+ib) = \wp ia + 1$, dus $\wp\omega'' - \wp ia < 1$, doch grooter dan $\wp\omega' - \wp ia$, die positief is.

θ_1 is de kleinste, θ_2 de grootste elongatie van den slinger.

2°. De tijd, waarin de slinger van de elongatie θ_1 tot de elongatie θ_2 komt, of de helft van den slingertijd T, wordt gegeven door

$$T = 2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

3°. De hoek Φ, dien het vertikale vlak van den slinger gedurende dien slingertijd gedraaid is, wordt gegeven door

$$i\Phi = l\,\frac{\sigma(\omega''+ia)}{\sigma(\omega''-ia)}\cdot\frac{\sigma(\omega''+\omega+ib)}{\sigma(\omega''-\omega-ib)}\cdot\frac{\sigma(\omega'-ia)}{\sigma(\omega'+ia)}\cdot\frac{\sigma(\omega'-\omega-ib)}{\sigma(\omega'+\omega+ib)} - 2\omega(\zeta ia + \zeta(\omega+ib))\,,$$

of herleid:

$$\Phi = 2(a+b)\eta - 2\omega\left(\frac{1}{i}\,\zeta ia + \frac{1}{i}\,(\zeta(\omega+ib) - \zeta\omega)\right).$$

Bijzonder geval $\Delta = 0$.

Is $\wp\omega' = \wp\omega''$, dan vallen de beide waarden θ_1 en θ_2 samen, en hebben we met een conischen slinger te doen. Dan is

$$\Delta = 0\,,\ \wp\omega' = \wp\omega'' = -\tfrac{1}{2}\wp\omega\,,\ \omega' = \omega'' = \infty.$$

Verder

$$\wp^3\omega = g_3 \text{ of } 27\wp^6\omega = 27 g_3{}^2 = g_2{}^3\,,\ \wp^2\omega = \frac{h^2+3}{9}\,,$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = \wp\omega' + \frac{h+3}{6} = \frac{h+3-\sqrt{h^2+3}}{6}\,,$$

dus

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{h^2+3}-h}{3}\,,\ h = \frac{1-3\cos^2\theta}{2\cos\theta}.$$

$$\tfrac{1}{2}C^2 = \tfrac{1}{27}\left(\sqrt{(h^2+3)^3} - h(h^2-9)\right) = \frac{\sin^4\theta}{4\cos\theta}.$$

Omdat $\cos\theta$ voor $h = -1$ tot $h = \infty$ verandert van 1 tot 0, zal alleen bij elke amplitude kleiner dan 90° een conische beweging mogelijk zijn. De omwentelingstijd T van den slinger wordt gevonden uit

$$d\phi = \frac{C\sqrt{2}}{\sin^2\theta}\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \sqrt{\frac{g}{e\cos\theta}}\,dt\,,$$

dus

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}.$$

R 8 b, F 2 h, 8 h γ.

DE WENTELING VAN EEN LICHAAM EN DE FUNCTIEN VAN WEIERSTRASS,

DOOR

G. SCHOUTEN,
(Delft.)

Ook de wenteling van een vast lichaam om zijn zwaartepunt is door gebruikmaking van de functien van WEIERSTRASS in vergelijkingen te brengen, die om hare eenvoudigheid en doorzichtigheid gunstig afsteken bij die, gevonden door toepassing van de functien von LEGENDRE (zie o.a. Sur la rotation d'un corps, par C. G. J. JACOBI, Journal von Crelle, Bd 39).

Wordt het zwaartepunt van het lichaam gekozen tot oorsprong O van een assenstelsel, dat de hoofdtraagheidsassen OP, OQ, OR tot assen heeft, dan zijn de differentiaalvergelijkingen van de beweging

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq \end{aligned}\right\} \quad (A).$$

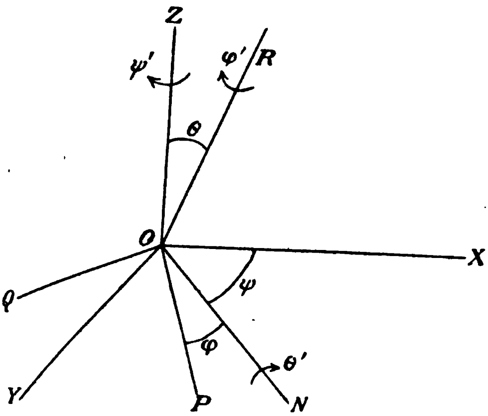
Hierin stellen A, B, C de traagheidsmomenten van het lichaam voor resp. om de assen OP, OQ, OR, en p, q, r de ontbondenen volgens die assen van de hoeksnelheid $\bar{\omega}$ om de oogenblikkelijke as op het tijdstip t van de beweging.

Uit (A) volgen onmiddellijk twee integraalvergelijkingen, nl.

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin h het dubbel is van de energie en k het standvastig moment van de bewegings-hoeveelheden der punten van het lichaam ten opzichte van O.



Wordt de as van dat koppel van bewegings-hoeveelheid tot OZ gekozen, en in het onveranderlijke vlak van dat koppel de vaste assen OX en OY, dan wordt de stand van het lichaam ieder oogenblik bepaald door de Euler'sche hoeken ψ, ϕ, θ.

Uit de figuur volgt:

$$\begin{aligned} Ap &= k \sin\theta \sin\phi \\ Bq &= k \sin\theta \cos\phi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ Cr &= k \cos\theta. \end{aligned}$$

Verder

$$\psi' \sin\theta = p \sin\phi + q \cos\phi,$$

of, volgens (3):

$$\psi' \sin\theta = \frac{Ap^2}{k \sin\theta} + \frac{Bq^2}{k \sin\theta},$$

zoodat volgens (1) en de laatste van (3)

$$\psi' = k \frac{h - Cr^2}{k^2 - C^2 r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Eindelijk volgt nog uit (3):

$$tg\,\phi = \frac{Ap}{Bq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{Cr}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Door de formules (4), (5), (6) worden de elementen ψ, ϕ, θ,

die den stand van het lichaam bepalen, berekend uit de waarden van de bewegingselementen p, q, r.

Berekoning van p, q, r.

Stelt $\bar{\omega}$ de hoeksnelheid voor om de oogenblikkelijke as, dan kunnen uit de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= \bar{\omega}^2 \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= k^2 \end{aligned}\right\} \text{(B)}.$$

de hoeksnelheden p, q, r in $\bar{\omega}$ worden uitgedrukt. Men vindt

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= \frac{BC\bar{\omega}^2 + k^2 - (B + C)h}{(A - B)(A - C)} \\ q^2 &= \frac{CA\bar{\omega}^2 + k^2 - (C + A)h}{(B - C)(B - A)} \\ r^2 &= \frac{AB\bar{\omega}^2 + k^2 - (A + B)h}{(C - A)(C - B)} \end{aligned}\right\} \text{(C)}.$$

Door de eerste van (B) naar t te differentieeren, vindt men

$$\bar{\omega}\frac{d\bar{\omega}}{dt} = p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt},$$

welke volgens de vergelijkingen (A) ook als volgt kan geschreven worden:

$$\bar{\omega}^2\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)^2 = \frac{(A - B)^2(B - C)^2(C - A)^2}{A^2B^2C^2}p^2q^2r^2.$$

Worden hierin p^2, q^2, r^2 door hunne waarden in (C) vervangen, en $\bar{\omega}^2 = x$ gesteld, dan gaat ze over in

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -$$

$$-\left(x - \frac{(B + C)h - k^2}{BC}\right)\left(x - \frac{(C + A)h - k^2}{CA}\right)\left(x - \frac{(A + B)h - k^2}{AB}\right),$$

of, als

$$\frac{(B+C)h-k^2}{BC}=\alpha$$

$$\frac{(C+A)h-k^2}{CA}=\beta$$

$$\frac{(A+B)h-k^2}{AB}=\gamma$$

gesteld worden:

$$\pm dt=\frac{dx}{\sqrt{-4(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}.$$

We voeren nu de functien van WEIERSTRASS in, door hierin

$$x=\bar{\omega}^2=\wp u-\wp l$$

$$\wp l=-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

te stellen, waardoor ze overgaat in

$$\pm dt=\frac{diu}{\sqrt{4\wp^3u-g_2\wp u-g_3}}$$

met

$$g_2=4\left\{3\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right\}$$

$$g_3=-4\left\{2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma\right\}.$$

De discriminant $g_2{}^3-27g_3{}^2$ is hier zeker positief, aangezien de wortels van

$$\wp'^2u=4\wp^3u-g_2\wp u-g_3=0,$$

allen bestaanbaar zijn.

We hebben dus gevonden

$$\bar{\omega}^2=x=\wp u-\wp l$$

$$\pm dt=diu.$$

Hieruit blijkt, dat u van den vorm $iu+$ standvastige genomen moet worden, en wel $iu+\omega$, omdat $\bar{\omega}^2$ positief en eindig moet blijven gedurende de geheele beweging.

De integraalvergelijking is dus

$$t = u$$
$$\bar{\omega}^2 = \wp(iu + \omega) - \wp l,$$

als t met u tegelijk nul wordt genomen.

Voor $u = 0$ heeft dan $\bar{\omega}^2$ de maximum-waarde $\wp\omega - \wp l$, voor $u = \frac{\omega'}{i}$ de minimum-waarde $\wp\omega'' - \wp l$.

Deze waarde van $\bar{\omega}^2$ in (C) gesteld, geeft

$$p^2 = \frac{\mathrm{BC}}{(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{C})}(\wp(iu+\omega) - \wp l - \alpha)$$

$$q^2 = \frac{\mathrm{CA}}{(\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{B}-\mathrm{C})}(\wp(iu+\omega) - \wp l - \beta)$$

$$r^2 = \frac{\mathrm{AB}}{(\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{B})}(\wp(iu+\omega) - \wp l - \gamma).$$

Worden hierin

$$\wp l + \alpha = \wp a$$
$$\wp l + \beta = \wp b$$
$$\wp l + \gamma = \wp c$$

gesteld, dan blijken $\wp' a$, $\wp' b$, $\wp' c$ alle drie gelijk nul te zijn, zoodat ze de drie wortels $\wp\omega$, $\wp\omega'$, $\wp\omega''$ van $\wp'^2 u = 0$ voorstellen.

Om te weten, welke van $\wp a$, $\wp b$, $\wp c$ met $\wp\omega$, welke met $\wp\omega'$ en welke met $\wp\omega''$ overeenkomt, berekenen wij ze.

Men vindt

$$3\,\mathrm{ABC}\wp a = -(\mathrm{A}-\mathrm{B})(k^2 - \mathrm{C}h) - (\mathrm{A}-\mathrm{C})(k^2 - \mathrm{B}h)$$
$$3\,\mathrm{ABC}\wp b = -(\mathrm{B}-\mathrm{C})(k^2 - \mathrm{A}h) - (\mathrm{B}-\mathrm{A})(k^2 - \mathrm{C}h)$$
$$3\,\mathrm{ABC}\wp c = -(\mathrm{C}-\mathrm{A})(k^2 - \mathrm{B}h) - (\mathrm{C}-\mathrm{B})(k^2 - \mathrm{A}h).$$

Uit deze waarden voor $\wp a$, $\wp b$ en $\wp c$ blijkt, dat, wanneer B als de middelste in waarde van de traagheidsmomenten wordt aangenomen, en $\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C}$ wordt genomen ingeval $k^2 - \mathrm{B}h < 0$, doch $\mathrm{A} < \mathrm{B} < \mathrm{C}$ als $k^2 - \mathrm{B}h > 0$ is, dat dan

$$\wp b = \wp\omega$$
$$\wp a = \wp\omega''$$
$$\wp c = \wp\omega'$$

gesteld moeten werden.

Derhalve is

$$\left.\begin{aligned}\frac{(A-B)(A-C)}{BC}p^2 &= \wp(iu+\omega)-\wp\omega''\\ \frac{(B-C)(B-A)}{CA}q^2 &= \wp(iu+\omega)-\wp\omega\\ \frac{(C-A)(C-B)}{AB}r^2 &= \wp(iu+\omega)-\wp\omega'\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad (D)$$

waardoor de bewegingselementen p, q, r in functien van den tijd zijn uitgedrukt.

Neemt men in aanmerking, dat

$$\wp\omega-\wp\omega''=\frac{(A-B)(k^2-Ch)}{ABC},\ \wp\omega-\wp l=\beta$$

$$\wp\omega''-\wp\omega'=\frac{(C-A)(k^2-Bh)}{ABC},\ \wp\omega''-\wp l=\alpha$$

$$\wp\omega'-\wp\omega=\frac{(B-C)(k^2-Ah)}{ABC},\ \wp\omega'-\wp l=\gamma$$

is, dan volgt uit (D), dat op het oogenblik $t=u=0$ van de beweging p^2 en r^2 hunne maximum-waarden

$$p^2_M=\frac{k^2-Ch}{A(A-C)},\quad r^2_M=\frac{k^2-Ah}{C(C-A)}$$

hebben, terwijl $q^2=0$ is.

Bij het begin der beweging is dus ondersteld, dat de oogenblikkelijke as in het vlak POR ligt, en dan heeft de hoeksnelheid $\bar{\omega}$ de maximumwaarde, gegeven door

$$\bar{\omega}^2=\beta.$$

Op het oogenblik $t=u=\frac{\omega'}{i}$ is $p^2=o$, bereikt q^2 de maximumwaarde en r^2 de minimumwaarde,

$$q_M{}^2=\frac{k^2-Ch}{B(B-C)},\ r_m{}^2=\frac{k^2-Bh}{C(C-B)}$$

en $\bar{\omega}$ de minimumwaarde

$$\bar{\omega}^2=\alpha.$$

Op het oogenblik $t = u = 2\frac{\omega'}{i}$ hebben p^2, q^2, r^2, $\bar{\omega}^2$ weer dezelfde waarden als op 't oogenblik 0, zoodat $\frac{2\omega'}{i}$ de periode van deze grootheden is.

Alleen moet nu nog nagegaan worden, hoe de teekens van p, q, r moeten genomen worden, daarbij dat voor $\bar{\omega}$ zelf positief nemende.

Nemen we aan, dat bij het begin der beweging $t = u = 0$ p en r beiden positief zijn, zoodat beiden hunne maximum-waarde hebben, dan worden $\frac{dp}{dt}$ en $\frac{dr}{dt}$ beiden negatief, zoodat volgens de differentaalvergelijkingen (A) van de beweging $\frac{dq}{dt}$ negatief wordt voor $A > C$, positief voor $A < C$.

Derhalve is het verloop gedurende het eerste deel o tot $\frac{\omega'}{i}$ van de periode het volgende:

Voor $A > B > C$, dus $k^2 - Bh < o$:

p verandert van p_M tot o,
r „ „ r_M „ r_m,
q „ „ o „ $-q_M$.

Voor $A < B < C$, dus $k^2 - Bh > o$:

p verandert van p_M tot o,
r „ „ r_M „ r_m,
q „ „ o „ $+q_M$,

Gedurende het tweede deel $\frac{\omega'}{i}$ tot $\frac{2\omega'}{i}$ is $\frac{dq}{dt}$ voor $A > C$ positief, r positief, zoodat $p < o$ is; voor $A < C$ daarentegen is $\frac{dq}{dt}$ negatief, r positief, dus ook $p < o$.

Het verloop gedurende dat tweede deel der periode is dus als volgt:

Voor $A > B > C$, dus $k^2 - Bh < o$:

p verandert van o tot $-p_M$,
q „ „ $-q_M$ „ o,
r „ „ r_m „ r_M.

Voor $A < B < C$, dus $k^2 - Bh > 0$:

p	verandert	van	0	tot	$-p_M$,
q	„	„	$+q_M$	„	0,
r	„	„	r_m	„	r_M.

Deze uitkomsten kunnen we samenvatten in de volgende stelling:

Voor $k^2 - Bh > 0$ beschrijft de oogenblikkelijke as Ω om de *grootste as* van de traagheidsellipsoide als as een kegeloppervlak in *denzelfden* zin als waarin de wenteling om die as geschiedt; voor $k^2 - Bh < 0$ echter beweegt de as Ω om de *kleinste as* van de traagheidsellipsoïde als as een kegeloppervlak in *tegengestelden* zin als waarin de wenteling om deze as geschiedt.

Berekening van de elementen ψ, ϕ, θ, die den stand van 't lichaam bepalen.

Volgens (4) is

$$\psi' = k\frac{h - Cr^2}{k^2 - C^2r^2} = \frac{k}{C}\left(1 - \frac{k^2 - Ch}{k^2 - C^2r^2}\right).$$

Hierbij valt op te merken, dat ψ' altijd positief is, zoodat ψ voortdurend zal toenemen en dus niet periodiek zal veranderen.

Wordt hierin r^2 vervangen door zijn waarde in (D), dan vindt men:

$$\psi' = \frac{k}{C}\left(1 - \frac{\dfrac{(A - C)(B - C)(k^2 - Ch)}{ABC^2}}{\dfrac{k^2(A - C)(B - C)}{ABC^2} + p\omega' - p(iu + \omega)}\right).$$

Stelt men nu:

$$\frac{k^2(A - C)(B - C)}{ABC^2} = p\nu - p\omega'$$

dan blijkt, dat

$$p'^2\nu = \frac{4\,k^2(A - C)^2(B - C)^2(k^2 - Ch)^2}{A^2B^2C^6}$$

is, terwijl

$$\wp\nu - \wp\omega'' = \frac{A - C}{AC^2}(k^2 - Ch),\ \wp\nu - \wp\omega = \frac{B - C}{BC^2}(k^2 - Ch)$$

is, zoodat $\wp\nu > \wp\omega$, dus $\wp'\nu < 0$ is, als ν tusschen 0 en ω gekozen wordt.

We moeten dus stellen:

$$\wp'\nu = \mp \frac{2k(A - C)(B - C)(k^2 - Ch)}{ABC^3} \text{ bij } k^2 - Bh \lessgtr 0.$$

Hierdoor gaat de uitdrukking voor ψ' over in

$$\psi' = \frac{k}{C} \mp \tfrac{1}{2} \frac{\wp'\nu}{\wp(iu + \omega) - \wp\nu}$$

of ook, met invoering van de ζ-functie:

$$\psi' = \frac{k}{C} \pm \tfrac{1}{2} (\zeta(iu + \omega + \nu) - \zeta(iu + \omega - \nu) - 2\zeta(\nu)).$$

Deze geïntegreerd geeft:

$$\psi + \text{standvastige} = \left(\frac{k}{C} \mp \zeta(\nu)\right)u \pm \frac{1}{2i}\, l \frac{\sigma(iu + \omega + \nu)}{\sigma(iu + \omega - \nu)}.$$

Ter bepaling van de standvastige stellen we, dat ψ voor $t = 0$ de waarde ψ_0 heeft, zoodat

$$\psi_0 + \text{standv.} = \pm \frac{1}{2i}\, l \frac{\sigma(\omega + \nu)}{\sigma(\omega - \nu)} = \pm \frac{1}{2i} l e^{2\eta\nu} = \pm \frac{\eta\nu}{i}.$$

Hierdoor vinden we:

$$\psi - \psi_0 = \left(\frac{k}{C} \mp \zeta\nu\right)u \pm \frac{1}{2i}\left(l \frac{\sigma(iu + \omega + \nu)}{\sigma(iu + \omega - \nu)} - 2\eta\nu\right).$$

Voor $t = u = \frac{\omega'}{i}$ geeft ze:

$$\psi - \psi_0 = \left(\frac{k}{C} \mp \zeta\nu\right)\frac{\omega'}{i} \pm \frac{1}{2i} 2\eta'\nu = \frac{1}{i}\left(\left(\frac{k}{C} \mp \zeta(\nu)\right)\omega' \pm \nu\eta'\right),$$

welke uitdrukking voorstelt den hoek, waarmede ψ geregeld

gedurende elke halve periode $\left(n\frac{\omega'}{i} \text{ tot } (n+1)\frac{\omega'}{i}\right)$ toeneemt.

Volgens (5) is

$$\text{tg } \varphi = \frac{Ap}{Bq}.$$

Door deze te differentieeren, vindt men, met inachtneming van de differentiaalvergelijkingen (A):

$$\varphi' = \frac{r}{k^2 - C^2 r^2}(k^2 - Ch),$$

waaruit blijkt, omdat r altijd positief is, dat ook φ' altijd hetzelfde teeken behoudt, en wel het positieve voor $k^2 - Ch > 0$, d. i. voor $A > B > C$, en het negatieve voor $k^2 - Ch < 0$, d.i. voor $A < B < C$.

De hoek ϕ zal dus voortdurend toenemen, als $k^2 - Bh < 0$ is, voortdurend afnemen, als $k^2 - Bh > 0$ is.

Worden p en q in de uitdrukking voor tg ϕ vervangen door hunne waarden in (D), dan vindt men:

$$\text{tg}^2 \phi = \frac{A(B - C)(p(iu + \omega) - p\omega'')}{B(A - C)(p\omega - p(iu + \omega))}.$$

Voor $t = u = 0$ is $\text{tg}^2 \phi = \infty$; voor $t = u = \frac{\omega'}{i}$ is $\text{tg}^2 \phi = 0$;

zoodat de hoek ϕ gedurende het tijdsverloop $n\frac{\omega'}{i}$ tot $(n+1)\frac{\omega'}{i}$ van elke halve periode met een rechten hoek aangroeit of afneemt, naar gelang $k^2 - Bh$ negatief of positief is.

Eindelijk is volgens (6

$$\text{Cos } \theta = \frac{Cr}{k}.$$

Omdat r niet van teeken verandert, zal dit ook het geval zijn met cos θ, zoodat θ periodiek zal veranderen; voor $t = 0$ is $\cos \theta_0 = \frac{C}{k} r_M$, voor $t = \frac{\omega'}{i}$ is $\cos \theta_1 = \frac{C}{k} r_m$. De as OR maakt in het vlak ROZ schommelingen met een amplitudo $\theta_1 - \theta_0$ en met een duur $\frac{2\omega'}{i}$.

Wordt r in de uitdrukking voor cos θ vervangen door zijn waarde in (D), dan gaat deze uitdrukking over in

$$\cos^2\theta = \frac{ABC^2}{(A-C)(B-C)k^2}(\wp(iu+\omega)-\wp\omega)$$

welke ook als volgt kan geschreven worden:

$$\cos^2\theta = \frac{\wp(iu+\omega)-\wp\omega'}{\wp\nu-\wp\omega'}$$

waaruit op nieuw blijkt, dat cos θ nimmer nul zal worden.

Hiermede is de wenteling van een lichaam om zijn zwaartepunt volledig bepaald.

Bij dit onderzoek is ondersteld, dat A, B, C onderling ongelijk zijn en $k^2 - Bh \neq 0$.

Is $A = B$, dan is $\alpha = \beta$; is $B = C$, dan $\beta = \gamma$; is $k^2 - Bh = 0$, dan $\alpha = \gamma = \frac{h}{B}$; is dus $A = B = C$, dan is $\alpha = \beta = \gamma$. In elk van deze gevallen en alleen in deze gevallen, is de discriminant gelijk nul en kunnen de bewegingsvergelijkingen zonder gebruikmaking van elliptische functien opgemaakt worden. De uitkomsten in die gevallen vindt men in elk leerboek over de theoretische Mechanica.

IETS OVER HET BEPALEN VAN HET MIDDELPUNT VAN EVENWIJDIGE KRACHTEN, DIE AANGRIJPEN OP DE ZIJDEN VAN EENIGE BEPAALDE VEELHOEKEN, ZONDER ANALYTISCHE MEETKUNDE,

DOOR

C. A. CIKOT.

('s-Hertogenbosch).

In dit opstelletje worden de volgende eigenschappen als bekend verondersteld:

1ᵉ. Wanneer in de hoekpunten van een driehoek evenwijdige krachten in denzelfden zin werken, valt hun middelpnnt samen met dat van den ingeschreven cirkel, als die krachten zich verhouden als de overstaande zijden.

2ᵉ. Wanneer in de hoekpunten van een driehoek ABC evenwijdige krachten werken die zich verhouden als de overstaande zijden, en de krachten in A en in B werken in een zin tegengesteld aan dien waarin de kracht in C werkt, dan valt het middelpunt van die krachten samen met dat van den cirkel, die aangeschreven is ten opzichte van de zijde AB.

Beide waarheden laten zich gemakkelijk bewijzen zonder dat men daarbij van coördinaat-assen gebruik maakt.

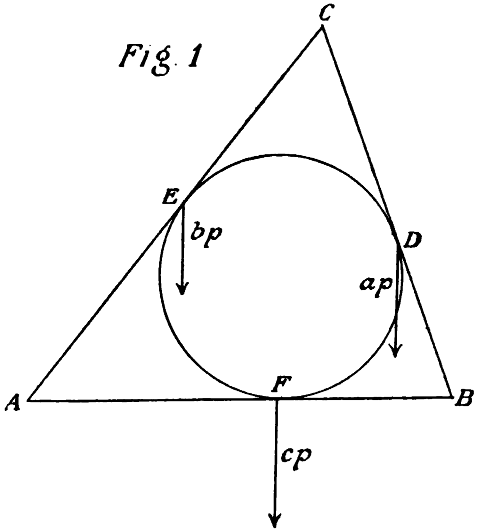
Met behulp van de eerste kunnen we nu de volgende stelling bewijzen:

Het middelpunt van drie evenwijdige krachten, die aangrijpen in de punten waarin de zijden van een driehoek geraakt worden door den ingeschreven cirkel, en dezelfde richting hebben, valt samen met dat van den cirkel, als die krachten zich verhouden als de zijden waarop ze aangrijpen.

B e w ij s. Daar de krachten zich verhouden als de zijden, kunnen wij die voorstellen door ap, bp en cp. De kracht bp (zie fig. 1), die in het raakpunt E aangrijpt, splitsen we in twee daarmede evenwijdige krachten, die aangrijpen in A en

in C; daar $AE = s - a$ en $EC = s - c$, vinden we voor de ontbondene in C : $(s - a)p$; splitsen we ap eveneens in twee daarmede evenwijdige, die in B en in C aangrijpen, dan vinden we voor de ontbondene in C : $(s - b)p$, dus totaal in C: $(s-a)p + (s-b)\ p = cp$; zoo vinden we voor de krachten in A en in B resp. ap en bp, waaruit blijkt, dat het oorspronkelijk stel evenwijdige krachten hetzelfde middelpunt heeft als een stel, in de hoekpunten werkende, en zich verhoudende als de overstaande zijden, m. a. w. het middelpunt van het oorspronkelijk stel valt samen met dat van den ingeschreven cirkel.

Fig. 1



Om nu deze eigenschap uit te breiden tot een willekeurigen omgeschreven veelhoek, bewijzen we eerst de volgende

Hulpstelling.

Als een cirkel de verlengden van de zijden CA en CB resp. in E en in D, en de zijde AB in F raakt, terwijl er in E en D evenwijdige krachten werken in richting tegengesteld aan een kracht die in F werkt, dan valt het middelpunt van die evenwijdige krachten samen met dat van den cirkel, als die krachten evenredig zijn met de zijden waarop hun aangrijpingspunt ligt. (zie fig. 2.)

Bewijs. De drie krachten stellen we voor door ap, bp en cp; ieder van die krachten splitsen we, als boven, in twee daarmede evenwijdige, die in de overeenstemmende hoekpunten aangrijpen; we vinden dan dat ons stel evenwijdige krachten identisch is met het volgende: ap in A, bp in B en cp in C, waarbij cp tegengesteld is aan ap en bp; hieruit blijkt dus dat het bedoelde middelpunt samenvalt met dat van den cirkel.

Nu kunnen wij, à la Bernouilli, laten zien dat: als in de punten waarin een omgeschreven *veel*hoek door den cirkel ge-

raakt wordt, evenwijdige en eender gerichte krachten werken, hun middelpunt samenvalt met dat van den cirkel, indien die krachten evenredig zijn met de zijden waarop hun aangrijpingspunt ligt. Laat dan ABCDE enz. een omgeschreven veelhoek zijn, terwijl O, N enz. de raakpunten zijn, in welke raakpunten dus bovenbedoelde krachten werken. (zie fig. 3.) Om van dezen n-hoek een omgeschreven $(n+1)$-hoek te maken, heeft men slechts van den eersten een driehoek BPL af te snijden door middel van een raaklijn PL, en om nu te zorgen dat bij den nieuwen veelhoek een stel evenwijdige krachten behoort zooals de stelling vereischt, moeten we in het raakpunt K een kracht aanbrengen evenwijdig met de krachten die bij den oorspronkelijken veelhoek behooren, en in grootte zóó dat aan de vereischte evenredigheid voldaan wordt, en verder in N en in O krachten (om de oorspronkelijk daar werkende te verkleinen, daar de zijden CB en BA korter geworden zijn) tegengesteld aan die in K, en in grootte (in verband met de vereischte betrekking tusschen krachten en zijden) evenredig met BL en met BP. Dit toegevoegd stel van drie krachten heeft, volgens de hulpstelling, zijn middelpunt in dat van den cirkel, en daar de krachten die bij den veelhoek ABCDE enz. behooren, ook, krachtens de veronderstelling, hun middelpunt in M hebben, zoo heeft het stel evenwijdige krachten, behoorende bij den $(n+1)$-hoek, ook zijn middelpunt in M.

Fig. 2.

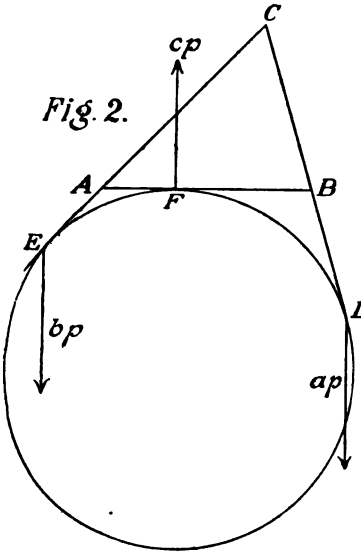
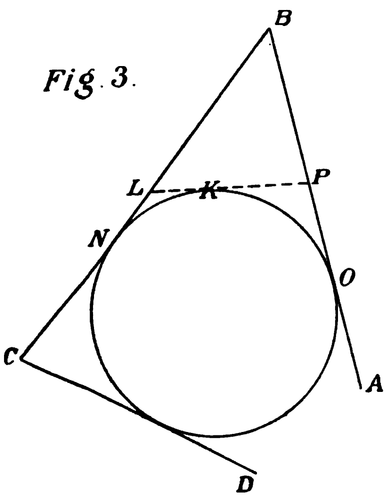
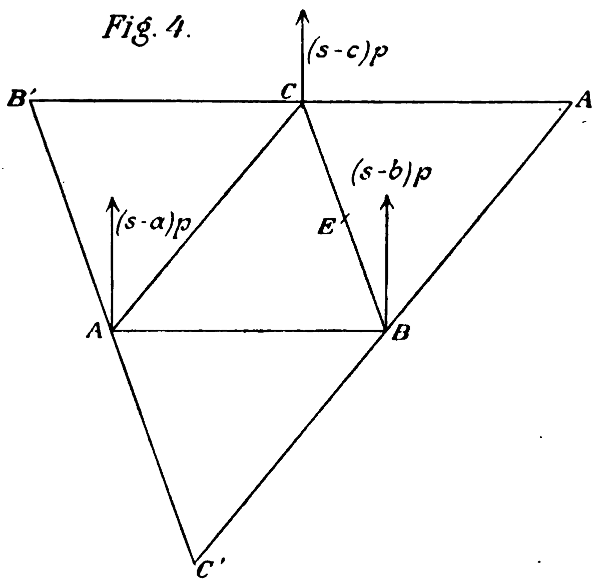


Fig. 3.



Naschrift. De theorie van het middelpunt van evenwijdige krachten is een middel om langs eenvoudigen en elementairen weg, te bewijzen dat sommige rechte lijnen door één punt gaan, of dat twee of meer bepaalde punten identisch zijn. Zoo kan men hiermede bewijzen, dat in een vierhoek het snijpunt der lijnen die de middens van de overstaande zijden verbinden, identisch is met het midden der lijn die de middens van de diagonalen verbindt; verder dat in een viervlak de medianen door één punt gaan, evenals de lijnen die de middens der overstaande ribben verbinden, en dat die twee snijpunten identisch zijn, en ten slotte ook de reden vinden waarin dat punt die lijnen verdeelt. Ook meer ingewikkelde eigenschappen kan men er mee bewijzen, b.v. deze stelling: De lijnen die de hoekpunten van een driehoek verbinden met de punten waarin de overstaande zijden geraakt worden door hun aangeschreven

Fig. 4.



cirkels, gaan door één punt; dit punt is hetzelfde als het middelpunt van den cirkel beschreven in den driehoek, die ontstaat, als men door de hoekpunten van den oorspronkelijken lijnen trekt evenwijdig met de overstaande zijden.

Veronderstel, om dit te bewijzen, dat er in de hoekpunten A, B en C van eenen driehoek krachten in dezelfde richting werken, resp. groot: $(s - a)p$, $(s - b)p$ en $(s - c)p$. Om het

middelpunt van die krachten te bepalen (zie fig. 4), kunnen we eerst $(s - c)p$ en $(s - b)p$ samenstellen; de resultante van die twee krachten grijpt aan in E, zóó dat $BE = s - c$ en $CE = s - b$ is, m. a. w. E is het raakpunt van BC met haar aangeschreven cirkel; de resultante in E moeten we nog samenstellen met de kracht in A, dus moet het middelpunt der krachten op AE liggen; maar ook moet het liggen op de lijn die C met het raakpunt op AB verbindt, en eindelijk ook op de lijn die B met het raakpunt op AC verbindt, en daar er maar één middelpunt is, gaan de drie bedoelde lijnen door één punt. (Verder is gemakkelijk na te gaan *hoe* die lijnen elkaar verdeelen).

We kunnen het middelpunt ook volgenderwijs bepalen: trekken we door de hoekpunten lijnen evenwijdig met de overstaande zijden, dan ontstaat er een driehoek A′B′C′, waarin B het midden is van A′C′, enz. Splitsen we nu de kracht $(s - c)p$, die in C aangrijpt, in twee daarmede evenwijdige die aangrijpen in A′ en in B′, dan krijgen we in A′ een kracht : $\frac{1}{2}(s - c)p$
Door splitsing van $(s - b)p$ „ „ „ : $\frac{1}{2}(s - b)p$

Totaal in A′ : $\frac{1}{2}\,ap$, en dus in B′ : $\frac{1}{2}\,bp$ en in C′ : $\frac{1}{2}\,cp$; deze krachten hebben hun middelpunt in dat van den ingeschreven cirkel van A′B′C′, zoodat dit punt identisch blijkt te zijn met het bovengevonden snijpunt.

Op analoge manier kan men, met behulp van de stelling op bl. 359 bewezen, laten zien dat het middelpunt van den ingeschreven cirkel bij een vierhoek in ééne rechte lijn ligt met de middens van de diagonalen, en verder dat genoemd punt den afstand tusschen de twee andere verdeelt in reden van de sommen der stukken aan het eerste en derde, en aan het tweede en vierde hoekpunt.

ENKELE BEREKENINGEN MET DE REKENLINIAAL

DOOR

F. J. VAES.

(Rotterdam).

De rekenliniaal, waarvan het gebruik voor berekeningen in de praktijk meer en meer algemeen wordt, leent zich zeer goed voor de bepaling van hoogere machtswortels en de oplossing van enkele vergelijkingen. In het volgende wordt besproken:

1e. Een niet algemeen bekende bepaling van a^3 en $\sqrt[3]{a}$.

2e. Een daarbij aansluitende bepaling van a^5, $\sqrt[5]{a}$, a^7, $\sqrt[7]{a}$, enz.

3e. Een oplossing van $a \sin x + b \cos x = c$.

4e. Een oplossing van $x^n \pm ax \pm b = 0$.

5e. Een oplossing van $x^m \pm x^n \pm ax \pm b = 0$.

2. De inrichting van de gewone rekenliniaal (van Mannheim) wordt bekend ondersteld. Op een liniaal l_1 is een logarithmische verdeeling aangebracht, en op een schuif s_1 een dergelijke verdeeling, zoodat als men het beginpunt van s_1 bij het punt a van l_1 plaatst, tegenover het punt b van s_1 het het produkt ab wordt afgelezen op l_1.

Op de liniaal is nog een tweede verdeeling l_2 aangebracht, waarvan de deelen half zoo groot zijn als die van l_1; deze verdeeling l_2 is zoodanig geplaatst, dat boven het punt a van l_1, op l_2 de waarde a^2 wordt afgelezen. Voor die aflezing kan een looper gebruikt worden.

Op de schuif is ook een tweede verdeeling aangebracht gelijk aan die van l_2, zoodanig dat de begin- en eindpunten van s_1 en s_2 samenvallen, en dus de deelstrepen van s_2 juist staan tegenover die van l_2, als men de verdeelingen van s_1 geplaatst heeft tegenover die van l_1.

1° Bepaling van a^3 en $\sqrt[3]{a}$.

3. De gewone wijze van werken ter berekening van a^3 is, dat men op de schaal l_1 het getal a aanwijst door het beginpunt van de schuif, dan eveneens op s_2 het punt a zoekt en afleest welk getal dit aanwijst op l_2. Want daar de deelen op s_1 en l_1 tweemaal zoo groot zijn als de overeenkomstige op s_2 en l_2 telt men bij elkander log a en 2 log a.

$\sqrt[3]{a}$ wordt gevonden door de schuif zoodanig te verplaatsen, dat het beginpunt van s_1 op l_1 hetzelfde getal aanwijst, als het gegeven getal, dat op l_2 genomen is, aangeeft op s_2. Door beproeving is de uitkomst vrij spoedig te vinden.

4. Er is echter een eenvoudiger methode, die o. a. op de beschrijving van de rekenliniaal van Mannheim is aangegeven, doch die niet algemeen bekend schijnt te zijn.

Bepaling van a^3: Draai de schuif om, zoodat s_2 naast l_1, en s_1 naast l_2 staat. Neem op s_2 en l_1 het gegeven getal, en stel de punten tegenover elkander. Op l_2 wordt dan a^3 gevonden bij het eind- of beginpunt van s_1. Want men telt log a en 2 log a bij elkander op.

Op s_2 (en l_2) komen twee punten voor, waarbij hetzelfde getal a geschreven is; het eene vertegenwoordigt een 10-maal grootere waarde dan het andere.

Al naar gelang men het eene of het andere punt gebruikt vindt men a^3 of $\frac{a^3}{10}$ of $\frac{a^3}{100}$.

5. *Bepaling van* $\sqrt[3]{a}$. Uit het voorgaande volgt onmiddellijk: Plaats begin- of eindpunt van s_1 bij het getal a $\left(\text{of bij } \frac{a}{10}, \text{ of bij } \frac{a}{100}\right)$ op l_1, en zoek op s_2 en l_1 twee gelijke getallen, die juist tegenover elkander staan. Deze geven den wortel aan.

Bepaling van a^5 en $\sqrt[5]{a}$.

6. De gewone wijze van werken is:

Voor a^5. Eerst a^4 te zoeken en dit te vermenigvuldigen met a.

Voor $\sqrt[5]{a}$. De logarithmenschaal te gebruiken, die aan de onderzijde van de schuif is aangebracht.

Voor alle hoogere machtswortels gebruikt men steeds de laatstgenoemde schaal.

7. In verband met de bepaling van a^3 en $\sqrt[3]{a}$ kan men echter den volgenden weg inslaan:

Voor a^5. Draai de schuif om, en stel het getal op s_2 tegenover zijn kwadraat op l_1; men leest dan op l_2 de waarde a^5 af, of ook $\frac{a^5}{10}$ of $\frac{a^5}{100}$, al naar gelang de ligging van het punt a op s_2.

Voor $\sqrt[5]{a}$. Stel s_1 bij a $\left(\text{of } \frac{a}{10} \text{ of } \frac{a}{100}\right)$ op l_2 en zoek op s_2 het getal, dat tegenover zijn kwadraat staat op l_1.

Met behulp van den looper is dit spoedig uit te voeren.

Bepaling van a^7 en $\sqrt[7]{a}$, en hoogere machtswortels.

8. *Voor* a^7. Bepaal a^3 als boven en stel a op s_2 tegenover a^3 op l_1. Dan wordt op l_2 aangewezen a^7, of $\frac{a^7}{10}$, of $\frac{a^7}{100}$.

Voor $\sqrt[7]{a}$. Stel het eind- of beginpunt van s_2 bij a $\left(\text{of } \frac{a}{10} \text{ of } \frac{a}{100}\right)$ op l_2, en zoek op s_2 een getal, dat tegenover zijn derdemacht op l_1 staat.

Dit vereischt eenig heen en weer verplaatsen van de schuif, omdat men telkens van een aangenomen waarde den derdemachtswortel moet zoeken. Hieraan is tegemoet te komen door die bepaling op een tweede rekenliniaal uit te voeren.

De graad van nauwkeurigheid blijkt hieruit, dat voor $\sqrt[7]{20}$ gevonden werd 1,535, terwijl eén logarithmentafel met 5 decimalen geeft 1,534.

9. De bepaling van a^8, $\sqrt[8]{a}$, a^9, $\sqrt[9]{a}$, a^{12}, $\sqrt[12]{a}$ enz. is terug te brengen tot verheffing tot lagere machten, of trekken van lagere wortels. a^{11} is te vinden door a op s_2 te stellen tegenover a^5 op l_1, en $\sqrt[11]{a}$ door op s_2 een getal te zoeken, dat tegenover zijn vijfdemacht op l_1 staat.

Evenzoo zijn a^{13}, a^{17} enz., $\sqrt[13]{a}$, $\sqrt[17]{a}$ enz. in verband te brengen met a^6, a^8 enz.

Oplossing van $a \sin x + b \cos x = c$.

10. Daar de rekenliniaal slechts sinussen en tangenten aangeeft is het wenschelijk geen andere goniometrische functies te gebruiken.

Men schrijve dus:

$$\frac{a}{b} \sin x + \cos x = \frac{c}{b},$$

stelle $\frac{a}{b} = \cot \phi$, en dus $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \phi$.

Zoodat de vergelijking te schrijven is

$$\frac{\cos \phi \sin x}{\sin \phi} + \cos x = \frac{c}{b},$$

of

$$\sin (x + \phi) = \frac{c}{b} \sin \phi.$$

De behandeling is dus als volgt:

Bepaal $\frac{c}{b}$ en noteer de waarde.

Bepaal $\frac{b}{a}$ op l_1, en houdt die waarde met den looper vast.

Keer de schuif om en bepaal ϕ, als staande op de met T gemerkte verdeeling tegenover de waarde $\frac{b}{a}$. Noteer de waarde van ϕ.

Plaats het beginpunt van de schuif tegenover de reeds bepaalde waarde $\frac{c}{b}$ op l_2, en zoek op de met S gemerkte schaal de waarde ϕ.

Daartegenover vindt men op l_2 de waarde van het tweede lid $\frac{c}{b} \sin \phi$.

Houdt die waarde met den looper vast.

Stel de schuif zoodanig, dat begin- en eindpunt samenvallen met die van l_1 en l_2, en lees op S den hoek af door den looper aangegeven. Dit is $x + \phi$.

Heeft men twee rekenlinialen ter beschikking, dan bepale men $\frac{c}{b}$ op de eerste, $\frac{b}{a}$ en ϕ op de tweede, $\frac{c}{b} \sin \phi$ en $x + \phi$ op de eerste.

Oplossing van $x^n \pm ax \pm b = 0$.

11. Men schrijve $x^n = a\left(x \mp \frac{b}{a}\right)$ of $x^n = a\left(\frac{b}{a} - x\right)$ en bepale eerst $\frac{b}{a}$.

Dan stelt men het beginpunt van s_1 bij a op l_1, geeft aan x een waarde, zoodanig dat $x \mp \frac{b}{a}$ of $\frac{b}{a} - x$ een rond getal is,

bepaalt (op een tweede rekenliniaal) x^n, en vergelijkt dit met het af te lezen product $a\left(x \mp \frac{b}{a}\right)$ of $a\left(\frac{b}{a} - x\right)$.

Onmiddellijk is te zien, of x te groot dan wel te klein is genomen, en men verandert nu x in de juiste richting telkens met 0.1, tot men voor x^n een waarde vindt, nabij het afgelezen product. Dan kan x met kleinere bedragen worden veranderd, en kan men met vrij groote nauwkeurigheid een der wortels bepalen.

Voor $n = 2$ kan men met een enkele rekenliniaal volstaan. Voor $n > 2$ is het gebruik van twee of meer linialen gewenscht.

Van de vergelijking

$$x^2 - 3.27x + 1.642 = 0$$

werd als een der wortels gevonden:

$$w_1 = 2.65.$$

De andere is dus: $w_2 = \frac{1.642}{2.65}$ (met de rekenliniaal bepaald).

Blijkbaar is $w_1 + w_2 = 3.27.$ *)

Oplossing van $x^m \pm ax^n \pm bx \pm c = 0$.

12. Men schrijve:

$$\left(\frac{x}{\sqrt[m]{a}}\right)^m = \mp x^n \mp \frac{b}{a} x \mp \frac{c}{a},$$

geve aan x een willekeurige waarde, en bepale de waarde p van het eerste lid. Dan zoekt men op een tweede liniaal (al of niet met behulp van een derde) een wortel van

$$\mp x^n \mp \frac{b}{a} x \mp \left(\frac{c}{a} \pm p\right) = 0$$

en vergelijkt de uitkomst met de eerst aangenomen waarde.

Door x in de juiste richting met kleine bedragen te doen veranderen kan men een wortel vinden.

*) Voor eenige jaren is door den heer Beghin een rekenliniaal in den handel gebracht, die eenigzins afwijkt van de meest gebruikte (van Mannheim). De methode door den heer B. aangegeven om een vierkantsvergelijking op te lossen vereischt het telkens optellen van twee getallen van 3 of 4 cijfers. Men is daarbij spoedig geneigd die getallen telkens op te schrijven, waardoor het nut van de rekenliniaal vrij wel verloren gaat, en de oplossing meer tijd vereischt dan de directe.

Verder dan de oplossing van derdemachtsvergelijkingen gaat de heer B. niet.

K 2 d

EEN NIEUWE CIRKEL IN DEN MODERNEN DRIEHOEK,

DOOR

H. A. W. SPECKMAN.

(Arnhem.)

§ 1. Zij ABC de gronddriehoek, H het hoogtepunt, O het middelpunt van den omgeschreven cirkel, H_r het reciproke of isotomisch toegevoegde punt aan H. Zooals bekend is, is H_r ook het punt Λ van Brocard, met het zwaartepunt Z en het symmediaanpunt K van driehoek ABC op eene lijn gelegen, zoodat $\Lambda Z = 2ZK$ is; het is dus anticomplementair met het symmediaanpunt. Zij N het punt van Tarry, R dat van Steiner van $\triangle$ ABC, N′ het midden van HH_r, O′ het midden van H_rN'. Zooals bekend is, loopt $H_rH \parallel$ aan OK en is $= 2OK$; dus $H_rN' \,\underline{\parallel}\,$ OK of aan den diameter van den Brocardcirkel.

§ 2. Zij A′B′C′ een driehoek, omgekeerd gelijkvormig en perspectivisch met driehoek ABC, en tot perspectivisch middelpunt hebbende het zwaartepunt Z van driehoek ABC. De meetkundige plaats der punten van $\triangle$ ABC, die met de gelijkstandige punten van $\triangle$ A′B′C′ op ééne lijn zijn gelegen, gaande door Z, is eene gelijkzijdige hyperbool, gaande door Z, A, B en C. Evenzoo is de meetkundige plaats der punten van $\triangle$ A′B′C′, die met gelijkstandige punten van $\triangle$ ABC op ééne lijn door Z liggen, eene gelijkzijdige hyperbool, gaande door A′,B′,C′ en Z. De hoogtepunten H en H′ der driehoeken ABC en A′B′C′ zijn gelijkstandige punten. Ook liggen ze op de gelijkzijdige hyperbolen ABCZ en A′B′C′Z, dus H, Z en H′ liggen op ééne lijn. Noemen we de orthologische middelpunten N en N′ der driehoeken ABC en A′B′C′ *normaalpunten* der driehoeken ABC en A′B′C′, dan ligt, zooals bekend is, N op den omschreven cirkel van $\triangle$ ABC en N′ op dien van $\triangle$ A′B′C′. Volgens de stelling:

De orthologische middelpunten of normaalpunten van twee omgekeerd gelijkvormige perspectivische driehoeken liggen op

éène lijn met het perspectivisch middelpunt, liggen dus N, Z en N′ op éène lijn. Daar N en N′ gelijkstandige punten der △△ ABC en A′B′C′ zijn, liggen ze dus ook op de gelijkzijdige hyperbolen ABCZ en A′B′C′Z.

De normaalpunten N en N′ zijn dus de *vierde snijpunten* dier gelijkzijdige hyperbolen met de omgeschreven cirkels der △△ ABC en A′B′C′.

Deze gelijkzijdige hyperbolen zijn dus de Kiepertsche hyperbolen Γ en Γ′ en hunne assen zijn evenredig aan een paar gelijkstandige zijden der driehoeken.

§ 3. Er bestaat een oneindig aantal driehoeken A′B′C′, omgekeerd gelijkvormig met △ ABC en perspectivisch er mede in Z. Daar de punten H, Z en H′ op éène lijn steeds liggen, is de meetkundige plaats der hoogtepunten van de driehoeken A′B′C′ de lijn HZ. Nemen we nu als hoogtepunt H′ van △ A′B′C′ het *middelpunt* O van den *omgeschreven cirkel* van △ ABC, dan is △ A′B′C′ daardoor volkomen bepaald.

Stelling. Trekt men door O lijnen, evenwijdig aan NA, NB, NC (N is het punt van Tarry van △ ABC), die de lijnen ZA, ZB en ZC respectievelijk snijden in de punten A′, B′ en C′, dan is △ A′B′C′ omgekeerd gelijkvormig perspectivisch met △ ABC, hebbende tot perspectivisch centrum het punt Z van △ ABC, en tot hoogtepunt H′ het punt O van △ ABC.

Bewijs. Het punt van Tarry N van △ ABC is het normaalpunt van △ ABC met de driehoeken, omgekeerd gelijkvormig met △ ABC en perspectivisch er mede in Z, daar N het vierde snijpunt is van de gelijkzijdige hyperbool ABCZ en den omgeschreven cirkel van △ ABC. De lijnen NA, NB en NC staan dus loodrecht op de zijden B′C′, C′A′ en A′B′ der der driehoeken A′B′C′. De hoogtelijnen van de driehoeken A′B′C′ zijn dus evenwijdig aan NA, NB en NC, en daar H′ = O het hoogtepunt van den aangenomen △ A′B′C′ was, zijn OA′, OB′ en OC′ // aan NA, NB en NC.

Gevolg. De driehoek A′B′C′ is homothetisch met den eersten Brocard-driehoek van △ ABC.

§ 4. Het normaalpunt N′ van △ A′B′C′ ten opzichte van △ ABC of het punt van Tarry N′ van △ A′B′C′ is het midden der lijn HH_r van △ ABC.

Bewijs. Volgens de stelling, dat bij twee omgekeerd gelijkvormige perspectivische driehoeken de hoogtepunten en de orthologische middelpunten (normaalpunten) op een cirkel liggen, liggen bij den gronddriehoek ABC en den eersten driehoek van Brocard $\alpha\beta\gamma$ van dien gronddriehoek, de punten N, O, H en het hoogtepunt H_1 van den 1[sten] Brocard-driehoek $\alpha\beta\gamma$ op één cirkel. Het hoogtepunt H_1 is echter, zooals bekend is, het midden van de lijn HH_r, terwijl N, Z en H_1 op ééne lijn liggen. Bij den gronddriehoek ABC en den driehoek $A'B'C'$ zijn de hoogtepunten H en O, de normaalpunten N en N'. Deze vier punten liggen ook op eenen cirkel, terwijl N, Z en N' ook op ééne lijn liggen. Het punt N' valt dus samen met het midden H_1 der lijn HH_r.

§ 5. De omgeschreven cirkel van driehoek $A'B'C'$ is de cirkel, op de lijn H_rN' als middellijn beschreven.

Bewijs. Het middelpunt der Kiepertsche hyperbool Γ' van $\triangle\ A'B'C'$ is het midden M' der lijn ON', daar dit het midden is der lijn die het hoogtepunt O van $\triangle\ A'B'C'$ met het 4[de] snijpunt N' van Γ' met den omgeschreven cirkel van $\triangle\ A'B'C'$ verbindt. Nu is, als Z' het zwaartepunt van $\triangle\ A'B'C'$ is, de lijn ZZ' ook middelijn van Γ', dus $ZM' = M'Z'$, en $OZ'N'Z$ is een parallelogram of $OZ' \parallel ZN'$ en $OZ \parallel Z'N'$. Ook is $OK \parallel H_rN'$, $OZ : OH = 1 : 3$, dus $Z'N' : OH = 1 : 3$. Zij O' het snijpunt van OZ' met $N'H$, dan is $O'Z' : O'O = Z'N' : OH = 1 : 3$, dus O' is het middelpunt van den omschreven cirkel van $\triangle\ A'B'C'$ en $O'N' = \frac{1}{2}\,N'H$, dus O' is het midden van de lijn H_rN'.

Gevolg. Z' van $\triangle\ A'B'C'$ is het midden van ZH_r.

§ 6. De loodlijnen, uit het midden N' van HH_r op de zijden van $\triangle$ ABC neergelaten, snijden den cirkel, op $N'H_r$ als diameter beschreven, in punten A', B' en C', zoodat $\triangle\ A'B'C'$ omgekeerd gelijkvormig perspectivisch is met $\triangle$ ABC en met perspectivisch centrum Z.

Het bewijs volgt uit de vorige stelling.

Stelling: De lijnen, uit H_r evenwijdig aan de zijden van $\triangle$ ABC getrokken, snijden den cirkel, op H_rN' als middellijn beschreven in punten $A'B'C'$, zoodat $\triangle\ A'B'C'$ omgekeerd gelijkvormig perspectivisch is met $\triangle$ ABC en met perspectivisch centrum Z.

Bewijs. Daar A', B' en C' gelegen zijn op een cirkel, met $N'H_r$ tot diameter, is $\angle H_rA'N' = 90°$. Is dus $H_rA' \parallel BC$, dan is $N'A' \perp$ op BC enz. Dus $\triangle A'B'C'$ is perspectivisch in Z met ABC.

Gevolg. H_r is het Steinersche punt van $\triangle A'B'C'$.

§ 7. Zij K_r isotomisch toegevoegd aan K in $\triangle ABC$ en K'_r isotomisch toegevoegd aan K' in $\triangle A'B'C'$, dan vallen beide punten K_r en K'_r samen in het snijpunt van NO en HH_r.

Bewijs. Het punt K_r van $\triangle ABC$, isotomisch toegevoegd aan K, is, zooals bekend is, het perspectivisch centrum van den gronddriehoek en den eersten Brocard-driehoek. Het is het snijpunt van de lijn NO met HH_r.

Het punt K'_r van $\triangle A'B'C'$ ligt op de lijn $N'O'$ of HH_r. Verder is

$$NO : OK_r = N'O' : O'K'_r.$$

Nu is $OO' \parallel NN'$, dus K_r en K'_r vallen samen.

Gevolg. De hyperbolen Γ en Γ' der driehoeken ABC en $A'B'C'$ snijden elkaar in de punten Z en K_r.

§ 8. Het punt H'_r van $\triangle A'B'C'$ ligt op de lijn NO, terwijl $H_rH'_r \parallel OH$ is.

Bewijs. Het punt H'_r ligt op $H'K'_r$ of op OK_r dus op NO. Ook is

$$H'K'_r : K'_rH'_r = HK_r : K_rH_r.$$

Dus is $OK_r : K_rH'_r = HK_r : K_rH_r$ of $H_rH'_r \parallel OH$.

Gevolg. Het punt K' van $\triangle A'B'C'$ ligt op de lijn H'_rZ' zoodat $H'_rZ' = 2Z'K'$ is.

§ 9. Neemt men op de lijnen MA, $M'B'$ en $M'C'$ stukken $M'\alpha = M'A'$, $M'\beta = M'B'$ en $M'\gamma = M'C'$, dan is $\alpha\beta\gamma$ de eerste driehoek van Brocard van $\triangle ABC$.

Bewijs. $\triangle \alpha\beta\gamma$ is gelijk en gelijkvormig met $A'B'C'$, dus omgekeerd gelijk en gelijkvormig met ABC. De middellijn H_rN' van den cirkel om $\triangle A'B'C'$ wordt ten opzichte van M' overgespiegeld in de middellijn OK van den cirkel om $\triangle \alpha\beta\gamma$.

Het punt Z' van $\triangle A'B'C'$ wordt Z van $\triangle \alpha\beta\gamma$ en van $\triangle ABC$, dus $\alpha\beta\gamma$ is de eerste Brocard-driehoek.

§ 10. De as van perspectief L der driehoeken ABC en $A'B'C'$ staat loodrecht op NZ.

Bewijs. De as van perspectief van twee omgekeerd gelijkvormige perspectivische driehoeken staat altijd loodrecht op de lijn, die de orthologische middelpunten verbindt en deelt den afstand tusschen de diametraal tegenover de orthologische middelpunten gelegen punten middendoor. Dus de as van perspectief van ABC en $A'B'C'$ staat $\perp$ op NN' of $\perp$ NZ en deelt den afstand H_rR middendoor.

§ 11. Laat men uit de middens der zijden van $\triangle$ $A'B'C'$ loodlijnen neer op de overeenkomstige zijden van $\triangle$ ABC, dan snijden deze elkaar op het midden der lijn H_rO in een punt T'.

Bewijs. Het punt Z' is het zwaartepunt van $\triangle$ $A'B'C'$ en van $\triangle$ OH_rN'.

Zijn m'_a, m'_b en m'_c de middens der zijden van $\triangle$ $A'B'C'$, dan is $\triangle$ $m'_am'_bm'_c$ de complementaire driehoek van $\triangle$ ABC.

De loodlijnen, uit m'_a, m'_b en m'_c op de zijden van $\triangle$ ABC neergelaten, zijn evenwijdig aan de lijnen $N'A'$, $N'B'$ en $N'C'$.

T' is dus het complementaire punt van N'. De punten N', Z' en T' liggen dus op éêne lijn, zoodat $N'Z' = 2Z'T'$ is, en daar Z' het zwaartepunt is van $\triangle$ $ON'H_r$, is T' het midden van OH_r. De lijn $T'M'$ is een diameter van den negenpuntcirkel van $\triangle$ $A'B'C'$.

§ 12. De loodlijnen, uit de middens der zijden van $\triangle$ ABC op de zijden van $\triangle$ $A'B'C'$ neergelaten, snijden elkaar in een punt T, het midden der lijn RH.

Bewijs. Zij T het midden der lijn RH, m_a, m_b en m_c de middens der zijden van $\triangle$ ABC. De driehoeken ABC en RHN hebben hetzelfde zwaartepunt Z.

Nu is $AZ : Zm_a = 2 : 1$ en $NZ : ZT = 2 : 1$, dus $m_aT \parallel AN$ of $m_aT \perp B'C'$.

Evenzoo is $m_bT \perp A'C'$ en $m_cT \perp A'B'$. Daar Z het zwaartepunt van $\triangle$ NRH is, liggen N, Z en T dus op eene lijn, dus T, N' en Z liggen op eene lijn en H_rR is $\parallel TN'$ of $\parallel ZN$.

De as van perspectief L der driehoeken ABC en $A'B'C'$ staat dus $\perp$ op H_rR, daar ze $\perp$ op NZ staat.

Volgens § 10 wordt H_rR middendoor gedeeld, dus L deelt H_rR rechthoekig middendoor.

§ 13. Verbindt men het punt H_r met de hoekpunten van $\triangle$ ABC, dan wordt de omgeschreven cirkel van $\triangle$ A'B'C' gesneden door de verbindingslijnen in de punten A'_2, B'_2 en C'_2. Alsdan zijn de driehoeken A'B'C' en $A'_2B'_2C'_2$ perspectivisch.

Evenzoo, verbindt men het punt van Steiner van $\triangle$ ABC met de hoekpunten van $\triangle$ A'B'C', dan snijden de verbindingslijnen den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC in de punten A_2, B_2 en C_2. De driehoeken ABC en $A_2B_2C_2$ zijn alsdan perspectivisch met centrum P.

Bewijs. De algemeene stelling geldt:

Zijn twee driehoeken PQR en *pqr* omgekeerd gelijkvormig en trekt men uit de hoekpunten van driehoek PQR lijnen, evenwijdig aan de zijden van $\triangle$ *pqr*, dan snijden deze drie lijnen elkaar in één punt van V van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC. Verbindt men V met de hoekpunten van $\triangle$ *pqr*, dan snijden deze lijnen den omgeschreven cirkel van $\triangle$ PQR in drie punten P_1Q_1 en R_1, zoodat $\triangle$ PQR perspectivisch is met $\triangle$ $P_1Q_1R_1$ [1]).

Passen we deze stelling toe op de omgekeerd gelijkvormige driehoeken ABC en A'B'C'.

De lijnen uit A', B', C' // aan de zijden van $\triangle$ ABC snijden elkaar in H_r. De lijnen uit A, B en C // aan de zijden van $\triangle$ A'B'C' getrokken, snijden elkaar in het punt van Steiner R. Derhalve is $\triangle$ $A'_2B'_2C'_2$ perspectivisch met A'B'C' en $\triangle$ $A_2B_2C_2$ perspectivisch met ABC.

De perspectivische as van de driehoeken $A'_2B'_2C'_2$ en ABC is de poollijn van het centrum van perspectief ten opzichte van den omgeschreven cirkel dier driehoeken. Evenzoo is de as van perspectief van de driehoeken $A_2B_2C_2$ en ABC de poollijn van het centrum van perspectief ten opzichte van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC.

---

[1]) Zijn de driehoeken PQR en *pqr* omgekeerd gelijkvormig, dan verandert het punt V op den omgeschreven cirkel van $\triangle$ PQR niet, als men de zijden van $\triangle$ *pqr* evenwijdig aan zich zelf verplaatst. Verplaatst men nu alleen de zijde *pq* evenwijdig aan zichzelf, dan ontstaan op de beenen *rp* en *rq* van $\angle$ *prq* twee projectivische puntreeksen, p_i en q_i ($i = 1, 2, 3, n, \infty$). Het punt V, met de punten p_i en q_i verbonden, geeft twee projectivische stralenbundels (Vp_i) en Vq_i), waarvan de lijn, uit V evenwijdig aan *pq* getrokken, dus de lijn VR een dubbelstraal is.

Evenzoo is de lijn Vr of VR_1, een dubbelstraal. Tot de bundel (Vp_i) behoort de straal, uit V evenwijdig aan rp getrokken, dus VQ. Tot de tweede bundel (Vq_i) behoort de straal, uit V evenwijdig aan rq getrokken, dus VP.

Van de projectivische stralenbundels $V(R, R_1, P_1, Q)$ en $V(R, R_1, Q_1, P)$ vormen echter de dubbelstralen met elk stelsel van de stralenparen

$$(VP_1, VP) \text{ en } (VQ, VQ_1)$$

eene involutie, zoodat de twee stralenstelsels

$$(VR, VP, VR) \text{ en } (VR_1, VP_1 \text{ en } VQ_1)$$

in involutie zijn.

Als echter door het gemeenschappelijk toppunt V van twee stralenbundels in involutie een willekeurige cirkel wordt gebracht, snijden twee overeenkomende stralen den cirkel steeds in 2 punten, zoodat de verbindingslijnen dier twee punten steeds door éénzelfde punt gaan. Derhalve gaan de lijnen RR_1, PP_1 en QQ_1 steeds door één punt en zijn de driehoeken PQR en $P_1Q_1R_1$ perspectivisch.

G e v o l g 1. De gronddriehoek ABC is omgekeerd perspectivisch met den eersten Brocard-driehoek $\alpha\beta\gamma$. De lijnen, uit de hoekpunten van $\alpha\beta\gamma$, evenwijdig getrokken aan de overeenkomstige zijden van den driehoek ABC, snijden den Brocard-cirkel in het punt K (symmediaanpunt). De lijnen, die het punt K verbinden met de hoekpunten van $\triangle$ ABC, snijden den Brocard-cirkel in de punten α'_2, β'_2, γ'_2. De driehoek α'_2, β'_2, γ'_2, de tweede Brocard-driehoek, is dus perspectivisch met den eersten Brocard-driehoek $\alpha\beta\gamma$.

G e v o l g 2. Trekt men uit het punt van Steiner R van driehoek ABC lijnen naar de hoekpunten α, β en γ van den 1sten Brocard-driehoek, dan snijden deze den omgeschreven cirkel van den $\triangle$ ABC in punten α_2, β_2, γ_2, zoodat $\triangle\,\alpha_2\beta_2\gamma_2$ perspectivisch in Q is met $\triangle$ ABC. Deze driehoek $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ is een *derde* Brocard-driehoek, die in eenzelfde verband tot den gronddriehoek staat, als de tweede Brocard-driehoek tot den eersten. De as van perspectief J der driehoeken ABC en $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ is de poollijn van Q ten opzichte van den omgeschreven cirkel van ABC. De lijn OQ is dus $\perp$ op de lijn J.

R 8 a, 9 b α

OVER DE VERANDERING, DIE DE LEVENDE KRACHT VAN EEN ZICH VRIJ BEWEGEND LICHAAM VAN ONVERANDERLIJKE GEDAANTE DOOR HET PLOTSELING IN RUST BRENGEN VAN EEN PUNT DAARVAN ONDERGAAT,

DOOR

Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF.
(Haarlem.)

(Oplossing van prijsvraag N°. 10 voor het jaar 1901.)

De opgaaf luidde aldus:

Van een zich vrij bewegend lichaam van onveranderlijke gedaante wordt plotseling een zijner punten P in rust gebracht door eene in dit punt aangrijpende impulsie. Wat is de meetkundige plaats der punten P zóó gelegen dat de nieuwe levende kracht eene gegeven fractie k zij der oude. Deze meetkundige plaats voor het algemeene of voor een of meer belangrijke bijzondere gevallen nader te bestudeeren.

I. Vergelijking van de meetkundige plaats.

Wij maken gebruik van de eigenschap, (Routh, Elementary Rigid Dynamics, § 295), dat bij het in rust brengen van een punt, het moment der hoeveelheid van beweging om elke lijn door dat punt onveranderd blijft. Stel de oorspronkelijke beweging is gegeven, voor het zwaartepunt als basispunt, door de translatiesnelheden u, v en w en de hoeksnelheden ω_x, ω_y en ω_z, waarbij de hoofdtraagheidsassen tot coördinaatassen zijn genomen. Ma^2, Mb^2 en Mc^2 zijn de traagheidsmomenten om die assen. Wij bepalen het punt P door zijne rechthoekige coördinaten x, y en z en noemen de traagheidsmomenten en producten van het lichaam, t. o. van evenwijdige assen door P, Ma'^2, Mb'^2, Mc'^2, Md'^2, Me'^2 en Mf'^2, waarbij d', e' en f' ook imaginair kunnen zijn. De hoeksnelheden van de gewij-

zigde beweging om de laatstgenoemde assen noemen wij Ω_x, Ω_y en Ω_z. Door op te schrijven, dat de momenten der hoeveelheden van beweging om de nieuwe assen vóór en na het aanbrengen van de impulsie, die het punt P in rust brengt, gelijk zijn, verkrijgen wij het volgende stel vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} a^2\omega_x + vz - wy &= a'^2\Omega_x - f'^2\Omega_y - e'^2\Omega_z, \\ b^2\omega_y + wx - uz &= - f'^2\Omega_x + b'^2\Omega_y - d'^2\Omega_z, \\ c^2\omega_z + uy - vx &= - e'^2\Omega_x - d'^2\Omega_y + c'^2\Omega_z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

waarin:

$$\begin{aligned} a'^2 &= a^2 + y^2 + z^2, & d'^2 &= yz, \\ b'^2 &= b^2 + x^2 + z^2, & e'^2 &= xz, \\ c'^2 &= c^2 + x^2 + y^2, & f'^2 &= xy, \end{aligned}$$

Als de nieuwe levende kracht gelijk is aan k maal de oorspronkelijke, die wij MT zullen noemen, dan is de arbeid, die de impulsie verricht $= (1 - k)$ MT.

Dit geeft ons de vergelijking:

$$\begin{aligned} (1 - k)2T &= (1 - k)(a^2\omega_x^2 + b^2\omega_y^2 + c^2\omega_z^2 + u^2 + v^2 + w^2) = \\ &= \Sigma(u - \Omega_z y + \Omega_y z)(u - \omega_z y + \omega_y z) \quad \ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

Door de eliminatie van de Ω's tusschen het stelsel (1) en verg. (2) verkrijgen wij de vergelijking van de gezochte meetkundige plaats in dezen vorm:

$$\begin{aligned} &(1 - k)\, 2T\{\Sigma a^2x^2\Sigma x^2 + \Sigma b^2c^2(y^2 + z^2) + a^2b^2c^2\} = \\ &= \Sigma a^2x^2(\Sigma ux)^2 + \Sigma b^2c^2\,[(y^2 + z^2)(\omega_y z - \omega_z y + u)^2 + \\ &+ \{vy + wz + x(\omega_z y - \omega_y z)\}^2] + a^2b^2c^2\Sigma(\omega_y z - \omega_z y + u)^2 \quad . . (3) \end{aligned}$$

De meetkundige plaats is derhalve een oppervlak van den 4[den] graad, in de vergelijking waarvan de verhouding k der beide levende krachten lineair optreedt. Hieruit volgt, dat de verschillende oppervlakken, die men voor varieerende waarden van k verkrijgt, een bundel vierdegraadsoppervlakken vormen, die uit den aard van het vraagstuk een geheel en al onbestaanbare basiskromme moeten bezitten, terwijl zij de bestaanbare ruimte enkelvoudig vullen. Daar het in het algemeene geval niet mogelijk is bij het vastleggen van een punt de levende kracht onveranderd te laten en evenmin het lichaam door het vastleggen geheel tot rust te brengen, zal er een

maximaalwaarde zijn voor k, kleiner dan één, waarboven geen bestaanbare oppervlakken mogelijk zijn en eveneens een minimaalwaarde, grooter dan nul, waaronder de oppervlakken onbestaanbaar worden.

II. 1ste *bijzonder geval:* de maximaalwaarde voor k is gelijk aan de éénheid.

Het 2de lid van verg. (3) is voor die waarde van k gelijk nul en dit kan (voor a, b en c van nul verschillend) alleen geschieden voor:

$$u = \omega_z y - \omega_y z,$$
$$v = \omega_x z - \omega_z x$$
$$\text{en } w = \omega_y x - \omega_x y.$$

Dit wil zeggen: het punt, dat wij vasthouden, had bij de oorspronkelijke beweging geen snelheid. Deze beweging was dus een zuivere rotatie en het oppervlak wordt dan voor $k = 1$ gereduceerd tot een rechte: de rotatie-as.

III. 2de *bijzonder geval:* de minimaalwaarde voor k is gelijk nul.

Als het mogelijk is de impulsie zóó aan te brengen, dat het lichaam geheel tot rust komt, moet het stelsel (1) een oplossing toelaten als alle Ω's nul worden gesteld, dus moet kunnen worden voldaan aan:

$$a^2\omega_x + vz - wy = 0,$$
$$b^2\omega_y + wx - uz = 0,$$
$$\text{en } c^2\omega_z + uy - vx = 0.$$

Deze vergelijkingen zijn strijdig tenzij $\Sigma a^2\omega_x u = 0$, in woorden: tenzij de snelheid van het zwaartepunt ligt in het vlak, dat t. o. van een traagheidsellipsoïde toegevoegd is aan de richting van de tijdelijke schroefas. De drie vlakken, waarvan de vergelijkingen dan afhankelijk zijn, snijden elkaar dan volgens een lijn, die in dat zelfde aan de richting $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ toegevoegde vlak ligt. Deze lijn is evenwijdig aan de snelheid van het zwaartepunt, zij is voor $k = 0$ hier de gezochte meetkundige plaats.

Dit alles had men ook door mechanische beschouwingen kunnen vinden nl. door op te merken, dat een beweging, die

door een impulsie vernietigd kan worden, zoodanig is, dat zij door een zuivere impulsie kan worden voortgebracht.

IV. 3^{de} *bijzonder geval:* gelijke traagheidsmomenten.

Wij stellen $a = b = c$. De lijn door het zwaartepunt evenwijdig aan de schroefas nemen wij aan tot Z-as, dan is $\omega_x = 0$ en $\omega_y = 0$. Tot Y-as nemen wij de richting loodrecht op de translatie van het zwaartepunt en op de schroefas, m. a. w. wij laten het YZ-vlak door de schroefas gaan, dan is $v = 0$; w is dan de translatie volgens de schroefas. Wij kunnen steeds de assen zoo aannemen, dat u en ω_z positieve grootheden zijn, voor $w > 0$ is de schroefbeweging dan linksdraaiend. Wij stellen $\omega_z = \omega$ en kunnen in dit bijzondere geval beide leden van verg. (3) deelen door den steeds positieven factor $x^2 + y^2 + z^2 + c^2$. Na rangschikking wordt dan de vergelijking:

$$x^2(w^2 - \mathrm{K}) + y^2(u^2 + w^2 - \mathrm{K}) + z^2(u^2 + c^2\omega^2 - \mathrm{K}) - 2\,uwxz +$$
$$+ 2\,c^2u\omega y + c^4\omega^2 - c^2\mathrm{K} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin $2k\mathrm{T} = \mathrm{K}$ is gesteld.

De bundel 4^{de} graadsoppervlakken bestaat nu uit een onbestaanbaar 2^{de} graadsoppervlak en uit een bundel 2^{de} graadsoppervlakken.

Wij zullen nu onderzoeken voor welke waarden van x, y en z de nieuwe levende kracht en dus K maximaal is. Daartoe differentiëeren wij verg. (4) achtereenvolgens naar de 3 veranderlijken, waarbij wij de differentiaal-quotienten van K nul stellen. Dit geeft:

$$(w^2 - \mathrm{K})\,x - uwz = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$(u^2 + w^2 - \mathrm{K})\,y + c^2u\omega = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\text{en } (u^2 + c^2\omega^2 - \mathrm{K})\,z - uwx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Combinatie van deze vergelijkingen met verg. (4) geeft:

$$u\omega y + c^2\omega^2 - \mathrm{K} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Eliminatie van $\frac{x}{z}$ tusschen de verg. (5) en (7) en van y tusschen de verg. (6) en (8) leidt tot dezelfde vierkantsvergelijking in K, nl.

$$\mathrm{K}^2 - (u^2 + w^2 + c^2\omega^2)\,\mathrm{K} + c^2\omega^2w^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

De wortels van deze vergelijking, die steeds positief en bestaanbaar zijn, geven ons de maximum- en de minimumwaarde van K, die wij K_1 en K_3 zullen noemen. Zoowel met K_1 als met K_3 correspondeert niet een enkel punt P, maar een reeks punten, die een rechte lijn vormen. Zoowel voor $K = K_1$ als voor $K = K_3$ reduceert zich derhalve het oppervlak tot een rechte.

Als verg. (9) gelijke wortels heeft, wat zal geschieden voor $u = 0$, $w^2 = c^2\omega^2$ gaat de verg. van het oppervlak over in:

$$k \,.\, 2w^2 (x^2 + y^2 + z^2 + c^2) = w^2 (x^2 + y^2 + z^2 + c^2).$$

Welk punt van het lichaam wij ook vasthouden, altijd wordt de levende kracht daardoor tot op de helft teruggebracht. De voorwaarde hiervoor is in woorden: de schroefas moet gaan door het zwaartepunt en de levende kracht van de translatie moet gelijk zijn aan die van de rotatie.

De verg. (5)—(7) zijn tevens de vergelijkingen, die ons voor een bepaalde waarde van K de coördinaten van het middelpunt van het 2[de] graadsoppervlak geven en verg. (8) is de voorwaarde, dat dit middelpunt op het oppervlak zelf ligt. Voor $K = K_1$ en $K = K_3$ is er een oneindig aantal middelpunten op het oppervlak, die een rechte lijn vormen, waartoe het oppervlak zich reduceert: het oppervlak bestaat dan uit twee onbestaanbare vlakken, die elkaar volgens een bestaanbare rechte snijden. Hieruit volgt, dat de basiskromme van den bundel bestaat uit een scheeven vierhoek met toegevoegd onbestaanbare zijden. In het algemeen is de meetkundige plaats van de middelpunten van een bundel 2[de] graadsoppervlakken een ruimtekromme van den 3[den] graad. De beide gevonden rechten moeten daarvan een deel uitmaken, derhalve bestaat zij hier uit 3 rechten De derde lijn is de lijn, die wij tot Y-as hebben aangenomen, want, als het oppervlak een middelpunt heeft, zijn daarvan de coördinaten:

$$x = 0, \; y = -\frac{c^2 u\omega}{u^2 + w^2 - K}, \; z = 0.$$

De beide met K_1 en K_3 overeenkomende rechten kruisen elkaar rechthoekig. Zij zijn beide evenwijdig aan het XZvlak en de vergelijkingen van hun projecties daarop zijn $(w^2 - K_1)x = uwz$ en $(w^2 - K_3)x = uwz$. Stellen wij nu $\dfrac{uw}{w^2 - K_1} \times \dfrac{uw}{w^2 - K_3} = q$

of $q\,\{w^4 - (K_1 + K_3)\,w^2 + K_1K_3\} = u^2w^2$, dan volgt uit verg. (9) dat de coëfficient van q gelijk is aan $-u^2w^2$, dus $q = -1$, waarmede het gestelde bewezen is.

Voor het geval $K = u^2 + w^2$ ligt het middelpunt oneindig ver. Wij stellen die waarde van K gelijk K_2 en kunnen dan aantoonen:

$$K_1 > K_2 > K_3.$$

Als er een middelpunt is, kunnen wij de assen daarheen verplaatsen. Om daarna de vergelijking op de hoofdassen te verkrijgen, moeten wij de reeds evenwijdig verplaatste X- en Z-assen draaiend om een hoek α:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\,u\,w}{w^2 - u^2 - c^2\omega^2}, \text{ onafhankelijk van K.}$$

De Y-as is in zijn oorspronkelijken stand reeds hoofdas. Als wij nu de assen steeds een positieven hoek kleiner dan 90° willen draaien, neemt de getransformeerde vergelijking twee verschillende vormen aan, naarmate w positief of negatief is. Voor een gemakkeijk overzicht zullen wij dit dus niet doen, de getransformeerde vergelijking is dan:

$$(K_3-K)x'^2+(K_2-K)y'^2+(K_1-K)z'^2+c^2\frac{(K_1-K)(K_3-K)}{K_2-K}=0 \quad (10)$$

Voor $w < 0$ zijn de assen nu niet den kleinst mogelijken hoek gedraaid; was dit het geval dan waren de coëfficiënten van x'^2 en z'^2 verwisseld.

Voor verschillende waarden van K neemt het oppervlak nu ook verschillende vormen aan:

1*ste geval*: $K < K_3$.

Er is geen bestaanbare meetkundige plaats, want de coëfficienten van de kwadraten x'^2, y'^2, z'^2 en c^2 in verg. (10) zijn alle positief.

2*de geval*: $K = K_3$.

Uit verg. (10) volgt dan $y' = 0$, $z' = 0$ of de nieuwe X-as.

3*de geval*: $K_2 > K > K_3$.

De coëfficient van x'^2 en de bekende term zijn negatief. Het Het oppervlak is een hyperboloïde met één blad. De keelellips is in het nieuwe YZ-vlak. Het middelpunt ligt op de negatieve Y-as en wel verder naarmate K grooter is.

4^{de} *geval*: $K = K_2$.

Het middelpunt ligt oneindig ver op de Y-as. Verg. (4) gaat over in:

$$-u^2x^2 + (c^2\omega^2 - u^2)z^2 - 2uwxz + 2c^2u\omega y + c^4\omega^2 - u^2 - w^2 = 0.$$

Het oppervlak is een paraboloïde en wel een hyperbolische paraboloïde, want het XZ-vlak wordt volgens een hyperbool gesneden.

5^{de} *geval*: $K_1 > K > K_2$.

De coëfficient van z'^2 en de bekende term in verg. (10) hebben het tegengestelde teeken van de coëfficienten van x'^2 en y'^2. De vergelijking stelt een hyperboloïde met één blad voor, maar nu met de keelellips in het nieuwe XY-vlak, dus loodrecht op die van het 3^{de} geval. Het middelpuut ligt nu aan den positieven kant van de Y-as en wel minder ver naarmate K grooter is.

6^{de} *geval*: $K = K_1$.

De meetkundige plaats is de nieuwe Z-as.

7^{de} *geval*: $K > K_1$.

Er is geen bestaanbaar oppervlak.

Om de grootte van de assen in het 3^{de} en 5^{de} geval te onderzoeken, schrijven wij de vergelijking aldus:

$$\frac{x'^2}{c^2\dfrac{K_1 - K}{K_2 - K}} + \frac{y'^2}{c^2\dfrac{(K_1 - K)(K_3 - K)}{(K_2 - K)^2}} + \frac{z'^2}{c^2\dfrac{K_3 - K}{K_2 - K}} + 1 = 0.$$

In het 3^{de} geval nemen de drie assen toe met K en in het 5^{de} geval af.

Wij hebben dus het volgende:

Als de beweging van een lichaam met gelijke traagheidsmomenten gegeven is, is voor de meetkundige plaats ook de richting van de hoofdassen gegeven, maar niet de plaats van het middelpunt op de Y-as of de grootte der assen. Nu is er een kleinste waarde voor k, waaronder het vraagstuk geen oplossing toelaat. Welk punt van het lichaam wij vasthouden, altijd is de nieuwe levende kracht grooter dan een bepaalde minimumwaarde. Voor die minimumwaarde is de meetkundige plaats een lijn, loodrecht op de Y-as aan den negatieven kant. Nemen we k grooter, dan gaat die lijn over in een

hyperboloïde met één blad, waarvan het middelpunt met grooter wordende k steeds verder naar den negatieven kant van de Y-as schuift en waarvan de assen steeds grooter worden. Eindelijk wordt het oppervlak een hyperbolische paraboloïde, als het middelpunt oneindig ver op de negatieve zijde van de Y-as is gekomen. Deze paraboloïde heeft loodrecht op het vlak van de parabool, die haar opening naar de negatieve zijde van de Y-as heeft, een andere parabool met haar opening naar de positieve zijde en denzelfden top. Als k nu verder aangroeit, komt het middelpunt van deze laatste parabool naderbij op de positieve Y-as en het oppervlak wordt dus weer een hyperboloïde met één blad, maar nu met het middelpunt op de positieve Y-as en de onbestaanbare as loodrecht op die van de vorige hyperboloïden. Naarmate k toeneemt nemen de assen af en komt het middelpunt naderbij, tot de hyperboloïde overgaat in een lijn, de onbestaanbare as, die de 1ste lijn loodrecht kruist. k heeft dan haar maximumwaarde. Welk punt wij ook vasthouden, nooit heeft k grooter waarde.

Het oppervlak is altijd een regelvlak.

V. 4de *bijzonder geval*: $a = b$, $c = 0$.

Hierbij is de massa in een enkele lijn geconcentreerd, die wij tot Z-as aannemen. Wij stellen ons echter voor, dat een punt daarbuiten, tot het lichaam behoorend, kan worden vastgelegd. Omdat de momenten om alle lijnen in het XY-vlak gelijk zijn, mogen wij de loodlijn op de projectie van de schroefas op dat vlak tot Y-as aannemen, waardoor ω_y nul wordt. De richting van de X-as kunnen wij zóó aannemen, dat u positief is. Door in verg. (3) te substitueeren: $c = 0$, $\omega_y = 0$, $(1 - k)\,2T = p^2$, gaat zij over in een vergelijking, die wij aldus kunnen schrijven:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)\{w^2 - p^2)(x^2 + y^2) + (ux + vy)^2 \times a^2\omega_x y^2\} =$$
$$= \{w(x^2 + y^2) - z(ux + vy) - a^2\omega_x y\}^2 \quad . \; . \; . \; . \; (11)$$

of $PQ = R^2$.

ω_z komt in deze vergelijking niet voor en kan dus willekeurig worden genomen, bijv. $= 0$, dan is de schroefas evenwijdig aan de X-as en u is de translatie. $\omega_x > 0$ geeft een linksdraaiende schroef; de schroefas snijdt het YZ-vlak in het punt

punt $\left(0, \frac{-w}{\omega_x}, \frac{v}{\omega_x}\right)$. Men kan ook aan ω_z een zoodanige waarde geven, dat de resulteerende rotatie loodrecht op de translatie van het zwaartepunt komt te staan; de beweging is dan een zuivere rotatie om een bepaalde as; ω_z moet dan voldoen aan $\Sigma u\omega_x = 0$, hier $u\omega_x + w\omega_z = 0$. Als men een punt van de rotatie-as vasthoudt, verandert de levende kracht niet, derhalve is er geen van de éénheid verschillende hoogste grens voor k; $p = 0$ geeft een bestaanbare meetkundige plaats: de rotatie-as. Uit den vorm van de vergelijking volgt, dat de Z-as, dus de zware lijn zelf, dubbellijn is voor alle waarden van p. Alle doorsneden door de Z-as worden dus gevormd door de Z-as zelf en een kegelsnede. Daar de Z-as voor alle waarden van k voldoet, is de levende kracht onbepaald als wij een punt van de zware lijn zelf vasthouden.

Het onderzoek naar dubbellijnen op het oppervlak loopt parallel met dat naar maximum- en minimumwaarden van p^2.

Verg. (11) naar x, y en z gedifferentiëerd, waarbij de diff. quotienten van p^2 nul zijn gesteld, en combinatie van de aldus verkregen vergelijkingen met verg. (11) geeft:

$$2x\mathrm{Q} + \mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = 2\,\mathrm{R}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

$$2y\mathrm{Q} + \mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = 2\,\mathrm{R}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

$$z\mathrm{Q} = -(ux + vy)\,\mathrm{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

en $$\mathrm{Q} = -y\omega_x\mathrm{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

Uit (14) en (15) volgt:

$$z\omega_x y\mathrm{R} = (ux + vy)\mathrm{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

Hieraan kan worden voldaan o. a. door te stellen $\mathrm{R} = 0$, waaruit dan volgt: $\mathrm{Q} = 0$, $\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial_x} = 0$ en $\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = 0$.

Wij hebben dan:

$u(x^2 + y^2) - z\,(ux + vy) - a^2\omega_x y = 0$ of $\mathrm{R} = 0$,

$(w^2 - p^2)\,(x^2 + y^2) + (ux + vy)^2 + a^2\omega_x{}^2 y^2 = 0$ of $\mathrm{Q} = 0$,

$(w^2 - p^2)\,x + u\,(ux + vy) + 0$,

$(w^2 - p^2)\,y + v\,(ux + vy) + a^2\omega_x{}^2 y = 0$,

waarvan de laatste drie onderling afhankelijk zijn.

$\frac{x}{y}$ tusschen de laatste twee vergelijkingen geëlimineerd geeft:

$$(u^2 + w^2 - p^2)(a^2\omega_x^2 + v^2 + w^2 - p^2) - u^2v^2 = 0.$$

een vierkantsvergelijking in p^2, waarvan wij de wortels, die steeds bestaanbaar zijn, p_1^2 en p_2^2 zullen noemen. $(p_1^2 > p_2^2)$. Voor beide waarden van p^2 stelt $Q = 0$ voor: twee samenvallende vlakken door de Z-as. De uit $Q = 0$ verkregen waarde van $\frac{x}{y}$ in $R = 0$ gesubstitueerd, geeft de verg. van een vlak, dat de Z-as snijdt en de Z-as zelf. Met $p^2 = p_1^2$ en en met $p^2 = p_2^2$ correspondeert als meetkundige plaats de Z-as en een lijn, die de Z-as snijdt. Deze lijnen zijn dubbellijnen. Of p_1^2 en p_2^2 ook maxima of minima van p^2 zijn zal uit het volgende blijken:

Aan verg. (16) wordt ook voldaan door

$$ux + vy = yz\omega_x.$$

Dit geeft ons nog de oplossing:

$$p^2 = 0,$$
$$y\omega_x = -w,$$
$$ux + vy + wz = 0$$

of de rotatie-as. $p^2 = 0$ is de minimumwaarde van p^2.

Uit verg. (11) blijkt, dat PQ steeds positief is en daar P positief is, kan Q niet negatief worden genomen.

$Q = 0$ is in het algemeen de vergelijking van twee vlakken door de Z-as; het is een vierkantsvergelijking in $\frac{x}{y}$. De voorwaarde voor gelijke wortels is de vierkantsvergelijking in p^2, waarvan wij de wortels p_1^2 en p_2^2 hebben genoemd.

Is $p^2 > p_1^2$, dan kan Q niet van teeken veranderen, dit teeken is negatief voor alle waarden van $\frac{x}{y}$. Voor $p^2 > p_1^2$ is er dus geen bestaanbare meetkundige plaats en p_1^2 is de maximumwaarde van p^2. Voor $p_1^2 > p^2 > p_2^2$ zijn er twee waarden van $\frac{x}{y}$, waartusschen Q positief is; het oppervlak is dus begrepen tusschen twee vlakken door de Z-as.

Voor $p^2 < p_2^2$ heeft Q altijd hetzelfde teeken, maar dit is positief. De waarde p_2 is dus geen minimumwaarde voor p.

In het algemeen geeft de combinatie van $Q = 0$ en $R = 0$ ons twee lijnen, die de Z-as in 2 verschillende punten snijden en die wij l_1 en l_2 zullen noemen en de Z-as zelf. De lijnen l_1 en l_2 kunnen ook onbestaanbaar worden; het zijn lijnen op het oppervlak, maar in het algemeen geen dubbellijnen.

Als wij in verg. (11) x door $\rho \cos \phi$ en y door $\rho \sin \phi$ vervangen, door ρ^2 deelen en daarna aan ϕ verschillende constante waarden geven, verkrijgen wij de vergelijkingen van doorsneden door de Z-as met ρ en z als loopende coördinaten:

$$\rho^2\{(u \cos \phi + v \sin \phi)^2 + a^2\omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2\} + 2\rho z w(u \cos \phi + v \sin \phi) +$$

$$+ z^2\{w^2 + a^2\omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2\} + 2a^2\rho\omega_x w \sin \phi -$$

$$-2a^2\omega_x \sin \phi \, z(u \cos \phi + v \sin \phi) + a^2\{w^2 + (u \cos \phi + v \sin \phi)^2 - p^2\} = 0 \quad (17)$$

Als de kegelsnede een middelpunt heeft, zijn de coördinaten daarvan:

$$\rho = -\frac{a^2\omega_x w \sin \phi}{a^2\omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2}, \quad z = \frac{a^2\omega_x \sin \phi \, (u \cos \phi + v \sin \phi)}{a^2\omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2}.$$

Voor $a^2\omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2 = 0$, is de kegelsnede een parabool. Voor $p^2 < a^2\omega_x^2$ of $k(a^2\omega_x^2 + u^2 + v^2 + w^2) > u^2 + v^2 + w^2$ zijn er twee vlakken, die parabolische doorsneden geven. In woorden is de voorwaarde voor parabolische doorsneden deze: de nieuwe levende kracht moet grooter zijn dan de levende kracht van de massa, geconcentreerd in het zwaartepunt en zich bewegend als het zwaartepunt vóór de impulsie werd aangebracht. Als de oorspronkelijke beweging een rotatie was om een as door het zwaartepunt, zijn er dus altijd parabolische doorsneden. Als bij een gegeven oorspronkelijke beweging enkele oppervlakken van den bundel geen parabolische doorsnede hebben, zijn die te vinden bij de kleine waarden van k. Als de oorspronkelijke beweging een translatie was, zijn er geen parabolische doorsneden.

De vergelijking, die ons de waarde van ρ geeft voor het middelpunt, kan aldus worden geschreven:

$$p^2(x^2 + y^2) - a^2\omega_x^2 y^2 - a^2\omega_x w y = 0.$$

Het is de projectie op het XY-vlak van de meetkundige plaats van de middelpunten. De vergelijking stelt voor: een

kegelsnede door den oorsprong, de top. Het middelpunt ligt op de Y-as in $y = \dfrac{a^2 \omega_z w}{p^2 - a^2 \omega_z^2}$.

Deze kegelsnede is een parabool voor $p^2 = a^2 \omega_z^2$, dus juist voor het geval, dat één van de doorsneden door de Z-as parabolisch is. De kegelsnede is een hyperbool voor $p^2 < a^2 \omega_z^2$, dus als er twee parabolische doorsneden zijn. Voor de coördinaten van het middelpunt geldt ook nog de betrekking $\rho(u \cos\phi + v \sin\phi) + zw = 0$ of $ux + vy + wz = 0$. Dit is de vergelijking van een vlak door den oorsprong, loodrecht op de snelheid van het zwaartepunt. De meetkundige plaats van de middelpunten is de doorsnede van dit vlak met een 2de graadscilinder, waarvan de beschrijvende lijnen evenwijdig zijn aan de Z-as: het is dus een kegelsnede. Wij kunnen aantoonen, dat zij de lijnen l_1 en l_2 snijdt.

Stellen wij den hoek, dien een der hoofdassen van een doorsnede door de Z-as met het XY-vlak maakt gelijk α, dan is:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\, uw \cos\phi}{u^2 \cos^2\phi - w^2},$$

dus onafhankelijk van p^2 of van k: als wij de doorsneden beschouwen van den geheelen bundel oppervlakken met een bepaald vlak door de Z-as, dan verandert daarin de richting van de hoofdassen niet.

Verg. (17) wordt na assenverplaatsing en assendraaiing:

$$\frac{\rho'^2}{\dfrac{a^2 p^2}{a^2 \omega_z^2 \sin^2\phi - p^2}} + \frac{z'^2}{\dfrac{a^2 p^2 \{(u\cos\phi + v\sin\phi)^2 + a^2 \omega_z^2 \sin^2\phi + w^2 - p^2\}}{(a^2 \omega_z^2 \sin^2\phi - p^2)^2}} = 1 \quad ..(18)$$

Wij kunnen nu nagaan hoe de opeenvolgende doorsneden zijn, voor verschillende waarden van p^2.

1*ste geval*: $p^2 > p_1^2$.

Er is geen bestaanbare meetkundige plaats.

2*de geval*: $p^2 = p_1^2$.

De meetkundige plaats is een lijn, nl. de samengevallen lijnen l_1 en l_2.

3*de geval*: $p_1^2 > p^2 > p_2^2$.

Het geheele oppervlak is begrepen tusschen de twee vlakken voorgesteld door de verg. $Q = 0$, die het oppervlak raken volgens de lijnen l_1 en l_2. Als p^2 weinig kleiner is dan p_1^2

blijft de noemer van z'^2 in verg. (18) altijd klein en positief voor de weinige waarden van ϕ, die een bestaanbare doorsnede geven, $a^2\omega_x^2 \sin^2\phi - p^2$ is altijd negatief. Al die doorsneden zijn dus hyperbolen met een zeer kleine bestaanbare as.

De onbestaanbare as wijkt in stand weinig af van die van de lijnen l_1 en l_2, die zelf onderling weinig in stand verschillen. Het geheele oppervlak heeft iets van een hyperboloïde met één blad, die men zou hebben vervormd door haar bij de keelellips tot één lijn (de Z-as) samen te drukken. Alle hyperbolen toch gaan door de Z-as. Wij moeten voor $p^2 > p_2^2$ nog onderscheiden:

a) p^2 is tevens $> a^2\omega_x^2$.

De doorsneden zijn in de opeenvolgende vlakken: de lijn l_1, hyperbolen met grooter wordende bestaanbare assen, met kleiner wordende bestaanbare assen en de lijn l_2.

b) $p^2 = a^2\omega_x^2$.

Op de hyperbolen met grooter wordende bestaanbare assen volgt een parabool, voor $\sin^2\phi = 1$, dan volgen weer de hyperbolen met afnemende bestaanbare assen.

c) $p^2 < a^2\omega_x$.

Tusschen de hyperbolen met toenemende en die met afnemende bestaanbare assen hebben wij een parabool, ellipsen en weer een parabool.

4*de geval*: $p^2 = p_2^2$.

De lijnen l_1 en l_2 zijn nu samengevallen, doordat zij een gestrekten hoek vormen. Alle doorsneden door de Z-as geven nu bestaanbare krommen. De twee raakvlakken, die nu samengevallen zijn, raken het oppervlak volgens een dubbellijn.

Wij moeten nu weer onderscheiden:

a) $p^2 > a^2\omega_x^2$.

Alle doorsneden hyperbolen.

b. $p^2 = a^2\omega_x^2$.

Eén doorsnede is een parabool.

c) $p^2 < a^2\omega_x^2$.

Er zijn twee parabolen en daartusschen ellipsen.

De hyperbolen gaan nu nog niet in elkaar over, zij beginnen en eindigen met dezelfde lijn $l_1 = l_2$.

5*de geval*: $p^2 < p_2^2$.

De doorsneden zijn weer, al naarmate p^2 grooter dan, gelijk aan of kleiner dan $a^2\omega_x^2$ is, alleen hyperbolen, hyperbolen en

een parabool of hyperbolen, een parabool, ellipsen, een parabool en weer hyperbolen, die nu overgaan in de eerstgenoemde hyperbolen, zonder lijn er tusschen. De lijnen l_1 en l_2 zijn imaginair. Naarmate p^2 kleiner wordt, wordt het deel van de doorsnede, dat ellipsen geeft, grooter.

6de geval: $p^2 = 0$.

Elk vlak door de Z-as snijdt het oppervlak in een punt, dat te beschouwen is als een ellips met oneindig kleine assen. Het oppervlak is nu gereduceerd tot een lijn:

$$ux + vy + wz = 0$$

$$w + \omega_z y = 0.$$

Deze lijn, de rotatie is nu ook de meetkundige plaats van de middelpunten der doorsneden.

Wij zullen nu in verg. (17) z als constant beschouwen, dan stelt de vergelijking de doorsnede van het oppervlak met een horizontaal vlak voor. Elke doorsnede heeft, als de lijnen l_1 en l_2 bestaanbaar zijn, de projecties van deze lijnen tot raaklijnen en is geheel tusschen die lijnen gelegen in een van de hoeken, die zij vormen of in twee overstaande hoeken. Daar verg. (17) door ρ^2 is gedeeld, is de bekende term eigenlijk de coëfficient van ρ^2 en de oorsprong is een dubbelpunt. De bekende term of $z^2(w^2 + a^2\omega_z^2 \sin\phi - p^2) - 2a^2\omega_z \sin\phi z(u\cos\phi + v\sin\phi) + a^2\{w^2 + (u\cos\phi + v\sin\phi)^2 - p^2\}$ beslist over den aard van het dubbelpunt. Heeft deze vorm gelijk nul gesteld en als functie van $tg\,\phi$ beschouwd bestaanbare wortels, dan zijn de raaklijnen aan het dubbelpunt bestaanbaar. Dit geschiedt voor:

$$(p^2 - w^2)(a^2 + z^2)\{a^2(v - \omega_z z)^2 + (w^2 - p^2)(a^2 + z^2) + a^2u^2\} > 0.$$

De vorm tusschen de accoladen is positief voor alle waarden van z als p^2 kleiner is dan $p_2{}^2$. Voor $p_1{}^2 > p^2 > p_2{}^2$ heeft de vorm bestaanbare wortels en is dus positief voor z tusschen twee grenzen.

Nemen wij nu in aenmerking dat $p_2{}^2$ altijd grooter is dan w^2, dan hebben wij het volgende:

Is $p^2 > p_2{}^2$ dan is voor z boven een bepaalde greus de oorsprong een geïsoleerd punt in de doorsnede. Wordt z kleiner dan verkrijgt men eerst een doorsnede, waar de oorsprong een keerpunt is, dan doorsneden waar de oorsprong een crunode

is, vervolgens weer een keerpunt en verder een geïsoleerd punt bij alle volgende doorsneden.

Is $p_2^2 > p^2 > w^2$ dan hebben alle doorsneden in den oorsprong een crunode.

Voor $p^2 = w^2$ hebben alle doorsneden in den oorsprong een keerpunt.

Voor $p^2 < w^2$ is de oorsprong voor alle doorsneden een geïsoleerd punt.

Wij kunnen dus zeggen, dat voor $p^2 < w^2$ de zware lijn het oppervlak geheel loslaat.

I 2 a

OVER HET KLEINSTE GEMEENE VEELVOUD VAN MEER DAN TWEE GETALLEN.

(Uit een brief van den Heer N. L. W. A. GRAVELAAR aan de Redactie.)

De door den Heer E. D. J. DE JONGH Jr. behandelde eigenschap van het K. G. V. van eenige getallen (Nieuw Archief, V, p. 262—267) komt reeds voor:

1°. met een direct bewijs zonder inductie, in:
Le Besgue, Exercices d'analyse numérique, Paris, 1859, pp. 31—32, XXXI;

2°. met hetzelfde bewijs als bij Le Besgue, in:
Lucas, Théorie des nombres, Paris, 1891, pp. 369 - 370, Ex. IV;

3°. overgenomen uit Lucas, vermeerderd met de overeenkomstige eigenschap van den G. G. D. van eenige getallen, medegedeeld zonder bewijzen, maar onmiddellijk voorafgegaan door de toe te passen hulpstelling over binomiaalcoëfficiënten, in:
Gravelaar, Opgaven ter toepassing van de theorie der rekenkunde, 1e stukje, Groningen, 1896, p. 67, nos. 719 en 720.

V 9, L[1] 5 b

ERRATUM.

In het levensbericht van J. W. Tesch, opgenomen in dit deel van het *Nieuw Archief*, blz. 310—316, is in regel 6 en 7

van blz. 323 de uitbreiding der stelling van JOACHIMSTHAL aan DE LONGCHAMPS toegeschreven. Dit is onjuist. Zoo als o.a. uit de behandeling der bedoelde stelling in DE LONGCHAMPS „*Géométrie analytique à deux dimensions*" blijkt, is de aangewezen uitbreiding afkomstig van ED. LAGUERRE, over wiens leven en werken men een opstel van E. Rouché in het 56ste cahier van het „Journal de l'École polytechnique" van 1887 raadplegen kan.

P. H. SCHOUTE.

BIBLIOGRAPHIE.

Géométrographie ou art des constructions géométriques, par EMILE LEMOINE. Recueil „Scientia", série phys.-math. fascicule n°. 18, 87 blz. Parijs, C. Naud, 1902.

De bewerkingen, die men verricht bij het construeeren van meetkundige figuren met behulp van passer en lineaal, brengt de schrijver terug tot de volgende:

Bewerking R_1: het brengen van de kant van de lineaal door een gegeven punt.

Bewerking R_2: het trekken van eene rechte lijn langs de in bepaalden stand gebrachte lineaal.

Bewerking C_1: het plaatsen van de passerpunt in een gegeven punt.

Bewerking C_2: het brengen van de passerpunt ergens op eene reeds getrokken rechte lijn.

Bewerking C_3: het beschrijven van een cirkel, nadat de eene passerpunt is geplaatst.

Van allerlei meetkundige constructies wordt nu nagegaan, hoeveel elementaire bewerkingen zij vereischen. Zoo komt aan elke constructie een symbool toe van den vorm: $(l_1R_1 + l_2R_2 + m_1C_1 + m_2C_2 + m_3C_3)$. Het getal $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$ noemt de schrijver de „eenvoudigheidscoëfficiënt", het getal $l_1 + m_1 + m_2$ heet de „juistheidscoëfficiënt" Met behulp van deze getallen worden verschillende constructies van dezelfde figuur met elkander vergeleken ten aanzien van hunne eenvoudigheid en van hunne nauwkeurigheid. Het denkbeeld van eene dergelijke systematische vergelijking is men aan den schrijver verschuldigd, die reeds in 1888 onderzoekingen over dit onderwerp publiceerde. Hij heeft thans de uitkomsten zijner onderzoekingen verzameld, aangevuld en gerangschikt en op deze wijze de „Géométrographie" geschapen.

Ongetwijfeld verdient deze leer de aandacht, omdat hare beoefening kan leiden tot werkelijke, niet schijnbare, vereen-

voudiging van elementaire constructies. Als een voorbeeld hiervan wijst de schrijver op de constructie van de gemeenschappelijke raaklijnen van twee cirkels. In 1888 vond hij voor den „eenvoudigheidscoëfficiënt" 78, er moesten 17 rechte lijnen en 20 cirkels worden getrokken. Thans wordt eene constructie medegedeeld met den coëfficiënt 35; het trekken van slechts 7 rechte lijnen van 5 cirkels is noodig. Kl.

C. A. LAISANT et A. BUHL. Annuaire des mathématiciens, 1901—1902. Een deel klein 8°. XXII en 468 blz., Parijs, C. Naud, 1902.

De heeren Laisant en Buhl hebben het de moeite waard geacht eene lijst te maken, waarin zijn opgenomen de namen, woonplaatsen en adressen van alle beoefenaars der wiskunde, voor zoover deze tot hen zijn doorgedrongen. De lijst telt meer dan 6000 namen. Zij zijn van meening, dat dit werk er toe kan bijdragen om den band tusschen de vakgenooten te versterken. In elk geval kan de raadpleging van zulk eene adreslijst groot gemak verschaffen. Menigeen is niet in staat, om zich in schriftelijke verbinding te stellen met een vakgenoot, omdat diens woonplaats of zelfs diens adres hem onbekend is. Toegevoegd is eene necrologie, eene lijst van wetenschappelijke genootschappen, voor zoover zij met de studie der wiskunde iets te maken hebben en eene lijst van de tegenwoordig verschijnende tijdschriften.

Ongetwijfeld is aan de samenstelling van dit werk veel zorg besteed, maar uit den aard der zaak is er onwillekeurig veel weggelaten en laat de homogeniteit nog veel te wenschen over. Het zou zeer onbillijk zijn, daarvan den samenstellers een verwijt te maken, evenals van de zonderlinge misvormingen, die sommige adressen hebben ondergaan. Indien de gebruikers van het boek slechts een weinig er toe medewerken, door hunne correcties aan de samenstellers op te zenden, kan in volgende uitgaven veel worden verbeterd.

Aan de lijsten gaat vooraf een levensbericht van Hermite door Émile Borel. Het werk wordt besloten met eenige wetenschappelijke mededeelingen van de heeren Appel, Petersen, Greenhill, Méray en Schoute. Vermelden wij hiervan alleen, dat Méray de voordeelen van het Esperanto als wereldtaal uiteenzet, en dat Schoute op zijne mededeeling nog doet volgen

eene korte schets van het ontstaan der Revue Semestrielle, en van de wijze, waarop dit tijdschrift tracht nut te stichten in de wiskundige wereld. Kl.

Leçons sur les séries à termes positifs professées au Collège de France par Émile Borel, recueillies et rédigées par Robert d'Adhémar. Een deel in 8°, 91 blz, Parijs, Gauthier-Villars, 1902.

In allerlei gedeelten der functietheorie blijkt het noodzakelijk eenig inzicht te hebben in de verschillende wijzen, waarop eene of andere bestaanbare analytische functie van x oneindig groot wordt voor oneindig groote waarden van x. Dat x^n, e^x, e^{e^x} voor groote waarden van x zich geheel verschillend gedragen, valt onmiddellijk in het oog, de vraag is nu of aangaande de wijze, waarop eene of andere functie aangroeit algemeene verschijnselen of regels zijn waar te nemen. Borel beantwoordt die vraag bevestigend; reeds in zijne vroegere geschriften heeft hij gewaagd van eene „théorie générale de la croissance", thans beoogt hij deze theorie volledig te schetsen. Tot goed begrip dier theorie acht hij het nuttig daaraan te laten voorafgaan eene studie van de reeksen met positieve termen, die met de leer van de aangroeiing der functiën in zulk een nauw verband staan. Het geheel vormt den inhoud van twintig door hem aan het Collège de France gegeven lessen, die hier door R. d'Adhémar worden wedergegeven. Wij moeten volstaan met alleen op enkele merkwaardige uitkomsten te wijzen, waarvan in de gebruikelijke leerboeken geen gewag kan worden gemaakt. Nadat in het eerste hoofdstuk de gewone kenmerken voor convergentie en divergentie van reeksen met positieve termen zijn besproken, wordt er opgemerkt, dat bij het gebruik van de logarithmische kenmerken van Bertrand zich twee verschillende uitzonderingsgevallen kunnen voordoen.

Ten eerste kan het kenmerk zijn „inapplicable", d. i. de gegeven reeks laat zich met geen enkele der reeksen van Bertrand vergelijken. Zoo men de te zoeken grenswaarde tracht te bepalen zijn „la plus grande" en „la plus petite des limites" gescheiden door het getal, waarbij de convergentie in divergentie overgaat. Ten tweede kan het kenmerk zijn „en défaut", d. i. er wordt eene bepaalde grenswaarde gevonden, maar het

is juist die waarde, die aangaande de convergentie geen beslissing geeft. Die beslissing is nu misschien te verkrijgen, door de gegeven reeks te vergelijken met eene volgende reeks van Bertrand van hoogere rangorde. Bertrand achtte het oneindig weinig waarschijnlijk, dat in dit geval nimmer eene beslissing zou worden gevonden, hier laat Borel zien, op het voorbeeld van Paul du-Bois-Reymond, dat men reeksen kan construeeren, voor welke alle mogelijke kenmerken van Bertrand „en défaut" zijn.

Hoe zwak toch ook eene reeks convergeert of divergeert, er is altijd eene nieuwe reeks uit af te leiden, die nog zwakker convergeert of divergeert. Van de reeksen gaat Borel over op de convergentie of divergentie van integralen met ∞ tot bovenste grens; zooals bij de reeksen kan men ook hier weder geen onder alle omstandigheden bruikbare regelen voor de convergentie der integraal aangeven. Als een „ensemble dénombrable" van positieve functies gegeven is, die steeds sneller en sneller aangroeien, is er toch nog altijd eene functie aan te wijzen, die nog sneller met x toeneemt. Voor de wijze van aangroeiing der positieve functies is geen schaal te maken, waarvan de verdeelingen te nummeren zijn.

Dergelijke beschouwingen dienen nu tot inleiding van de theorie der aangroeiingen. De „croissance irrégulière" wordt onderscheiden van de „croissance régulière, welke laatste met behulp van de orde van oneindiggrootheid van eenvoudige functies wordt gedefinieerd. Daarna wordt de theorie der aangroeiing in verband gebracht met de machtreeksen van een en van twee veranderlijken. Voornamelijk heeft het onderzoek ten doel het verband op te sporen tusschen de wijze van aangroeiing eener geheele functie en de orde van grootheid van de coëfficiënten, welke worden gevonden, als de functie in eene overal convergente machtreeks wordt ontwikkeld.

Moge dit korte en onvolledige overzicht er toe kunnen strekken om belangstelling te wekken voor het laatst verschenen werk van Borel.

Kl.

La Géométrie non Euclidienne, par P. Barbarin. Recueil „Scientia", série phys.-math. fascicule n°. 15, 79 blz. Parijs, C. Naud, 1902.

Het werkje vangt aan met eenige algemeene beschouwingen

ook van historischen aard. Gewezen wordt op de verschillende pogingen om het postulaat van Euclides te bewijzen. Saccheri, Lambert en Taurinus worden genoemd als te zijn de eerste onderzoekers, die trachtten na te gaan, wat er van de meetkunde werd, indien men het postulaat liet vervallen. Daarna worden de verdiensten van Lobatschewsky, Bolyai en Riemann als stichters der algemeene meetkunde in het licht gesteld. In het tweede hoofdstuk geeft de schrijver eene nauwkeurige analyse van de definities en postulaten uit het eerste boek der Elementen, welke moet dienen om den lezer langs geleidelijken weg te overtuigen van de logische bestaanbaarheid van de drie stelsels: de meetkunde van Riemann, van Euclides en van Lobatschewsky. Maar ook nog op andere wijze kan men tot dezelfde uitkomst geraken. Namelijk door het begrip „afstand van twee punten" als een fundamentaal begrip te beschouwen. Geeft men toe, dat tusschen de tien onderlinge afstanden van vijf punten in eene ruimte van drie afmetingen eene enkele betrekking moet bestaan, dat elk punt bepaald is door drie coördinaten x, y, z en dat de afstand van twee punten is eene functie hunner coördinaten, dan volgt uit de onderzoekingen van de Tilly opnieuw, dat de meetkunde van Riemann, van Euclides en die van Lobatchewsky de eenige mogelijke stelsels zijn.

Thans volgt eene uitvoerige uiteenzetting van de algemeene meetkunde, waarbij zich aansluit de trigonometrie en het meten van oppervlakken en inhouden. In de twee laatste hoofdstukken worden de tegenwerpingen besproken, die men tegen de niet-euclidische meetkunde heeft ingebracht, en worden eenige beschouwingen gegeven naar aanleiding van de vraag, welke meetkunde in onze ruimte als de ware zou gelden. De slotsom van den schrijver is, dat theoretische overwegingen hier tot niets kunnen leiden en dat elke proefneming, hoewel in theorie niet onmogelijk, waarschijnlijk voor altijd zal afstuiten op de betrekkelijke onvolmaaktheid der metingen. Het werkje bevat de portretten van Lobatschewsky en van Riemann.

Kl.

P. I. Helwig. Over een algemeen gemiddelde en de integralen, die samenhangen met de foutenwet van het meetkundig gemiddelde. Academisch

proefschrift, in 4°, 79 blz. Amsterdam, Delsman en Nolthenius, 1901.

In de gebruikelijke foutentheorie treedt het rekenkundig gemiddelde op den voorgrond. Aanleiding daartoe geeft de eenvoudige bepaling, maar ook het streven om te kunnen geraken tot de zoo eenvoudige foutenwet van Gauss. Intusschen hoe men ook getracht heeft de keuze van het rekenkundig gemiddelde te motiveeren, er bestaat geen theoretisch bezwaar tegen het bepalen van het gemiddelde langs anderen weg. Na uitvoerige beschouwingen over het gemiddelde in het algemeen, staat de schrijver stil bij het meetkundig gemiddelde en vraagt hij zich af, hoe de foutenwet moet veranderen, indien het meetkundig gemiddelde van een aantal waarnemingen als de meest aannemelijke waarde wordt beschouwd. Dit leidt hem tot de discussie van de integraal

$$\int_0^r \left(\frac{a}{x}\right)^{bx} dx ,$$

en tot die van allerlei andere integralen, die op de eene of andere wijze met de eerste samenhangen. Kl.

Leçons sur les séries divergentes par Emile Borel. Een deel in 8°, 182 blz. Parijs, Gauthier-Villars, 1901.

In dit derde deel van zijne lessen over de functietheorie komt de schrijver terug op het onderwerp, aan hetwelk zijne vroegere verhandeling „Mémoire sur les séries divergentes", Ann. de l'École normale, 1899, p. 113, was gewijd. Het geldt de groote vraag, in hoeverre men in de analyse het rekenen met divergente reeksen zou kunnen wettigen. De schrijver wijst er op, hoe Euler en zijn tijdgenooten zich om het divergeeren hunner reeksen weinig bekommerden en desniettegenstaande toch bijna nimmer tot onjuiste uitkomsten geraakten. Eerst door Cauchy werd, geheel in overeenstemming met de denkbeelden van Abel, aan zulk eene handelwijze een einde gemaakt. Tot op den tegenwoordigen tijd heeft men de divergente reeksen voor waardeloos gehouden, ook al werd eene uitzondering gemaakt voor de reeks van Stirling en eenige andere dergelijke halfconvergente reeksen. In het bijzonder hebben de sterrekundigen zich steeds met vrucht bediend van reeksen, wier divergentie eerst sinds korten tijd door Poincaré

werd aangetoond. Thans overweegt men het denkbeeld of het oordeel van Cauchy niet al te streng is geweest, en of men niet meer in den geest van Euler met de divergente reeksen zou kunnen rekenen. Onderscheid is te maken tusschen reeksen van functies en reeksen van getallen. Ten aanzien van deze laatste valt er na te gaan, in hoeverre het mogelijk is om aan de reeks een bepaald getal toe te voegen, van dien aard, dat de substitutie van de reeks voor dit getal of omgekeerd in allerlei berekeningen juiste of ten minste bijna altijd juiste uitkomsten geeft. Het schijnt, dat tot op zekere hoogte die mogelijkheid bestaat, mits men de rangorde der termen in eene divergente getallenreeks ook als een bepalend element der reeks beschouwt. Evenals bij voorwaardelijk convergente reeksen is het niet alleen de waarde der termen, maar tevens hunne volgorde, die bij de divergente getallenreeks het getal bepaalt, dat men als de som der reeks beschouwt.

Anders is het met eene reeks van functies. Onder deze kan men in de eerste plaats noemen de half convergente, of misschien beter gezegd asymptotische, machtreeksen. Hoewel zij voor alle waarden der veranderlijke divergeeren, kunnen zij veelal onder eenige beperkende voorwaarden als het equivalent beschouwd worden van eene bepaalde functie. Allerlei analytische bewerkingen op de reeks uitgevoerd komen volkomen overeen met dezelfde bewerkingen, uitgevoerd op de functie. In zulke gevallen is dus de som der divergente asymptotische reeks onmiddellijk gedefinieerd, en zelfs kan bij gegeven x de waarde dier som met meer of minder nauwkeurigheid rechtstreeks uit de begintermen der reeks worden afgeleid.

Maar behalve de asymptotische reeksen zijn er andere overal divergente machtreeksen in x. Ook hier kan in veel gevallen nog van eene som sprake zijn. En wel omdat zulk eene reeks zich dikwijls voordoet als de formeele oplossing van eene bepaalde differentiaalvergelijking, zoodat de werkelijke oplossing als som der reeks kan worden beschouwd. Betreft het machtreeksen, die naar gelang der waarde van x nu eens convergeeren, dan weer divergeeren, dan is eene bepaalde functie gegeven, en alle methoden van sommatie der divergente reeks hebben eigenlijk ten doel de analytische voortzetting dezer functie op te sporen. Inzonderheid op dit gebied bewegen

zich de hoogst verdienstelijke en zeer oorspronkelijke onderzoekingen van den schrijver. Zijne uitkomsten sluiten zich hier aan bij die van Mittag-Leffler, en hij tracht te doen uitkomen, hoe zijne denkbeelden over de divergente reeksen het mogelijk maakten om aan de uitkomsten van Mittag-Leffler uitbreiding te geven. Het boek is verdeeld in vijf hoofdstukken. Het eerste bevat de theorie der asymptotische reeksen volgens de denkbeelden van Poincaré. Het tweede handelt over het verband, dat er tusschen zekere divergente reeksen en oneindige kettingbreuken bestaat. Hier komen op den voorgrond de onderzoekingen van onzen vroegeren landgenoot Stieltjes over de omzetting van eene divergente reeks in eene convergente kettingbreuk.

In het derde hoofdstuk wordt gehandeld over verschillende sommatiemethoden, terwijl in de beide laatste hoofdstukken die sommatie in verband wordt gebracht met het opsporen der analytische voortzetting eener functie, en verder de theorie dezer voortzetting wordt ontwikkeld. Eene nauwgezette studie van dit belangrijke boek eischt ongetwijfeld van den lezer groote inspanning, toch zal men zonder groote moeite bij eene eerste lezing al dadelijk eenig denkbeeld verkrijgen van een gewichtig en aantrekkelijk gedeelte van de hedendaagsche functietheorie.

Kl.

Traité de cinématique par H. Sicard, avec des notes par A. Labrousse. Een deel in 8^0, 179 blz, Parijs, Gauthier-Villars, 1902.

Het werk is verdeeld in vijf boeken, waaraan voorafgaat eene inleiding, bevattende de eerste definities en eigenschappen ten aanzien van vectoren en van hunne momenten. Het eerste boek handelt over de beweging van een punt, over het begrip snelheid en over de raaklijnconstructies van Roberval. In het tweede boek wordt overgegaan tot het definiëeren der versnelling, waarbij ook van versnellingen van hoogere orde wordt melding gemaakt. In de bekende eenvoudige gevallen wordt bij centrale versnelling uit de gegeven baan de versnelling zelve bepaald.

De beweging van een lichaam wordt in het derde boek onderzocht, en wel wordt vooreerst van meetkundige beschouwingen daarbij gebruik gemaakt. Eene analytische behandeling

wordt in het vierde boek gegeven. Eerst wordt deze toegepast op de beweging van eene vlakke figuur in haar vlak. Eenvoudige voorbeelden worden uitgewerkt. Daarna volgt het onderzoek over de beweging van een lichaam in de ruimte. Ten slotte wordt in het vijfde boek de samenstelling van translaties en draaiingen besproken. Vijf noten zijn toegevoegd. I. De formules van Olinde Rodrigues. II De verplaatsing beschouwd als homografie en als punten-transformatie. III. Het lineaire complex. IV. Stelling van Schonemann en Mannheim. V. Over stangenstelsels. Kl.

L. Boltzmann. Leçons sur la théorie des gaz. Traduites par A. Gallotti, avec une introduction et des notes de M. Brillouin. Première partie. Een deel in groot 8°, XIX, 202 blz. Parijs, Gauthier-Villars, 1902.

In een zeer lezenswaardige, met overtuiging geschreven inleiding voert Brillouin de bekende, in 1895 verschenen „Vorlesungen über Gastheorie" van Boltzmann bij het Fransche wetenschappelijk publiek in. Na enkele opmerkingen over de eischen, aan een goede hypothese te stellen, schetst hij hoe de voorstelling van de vrije beweging der gasmoleculen onmiddellijk ontleend is aan de *waarneming* van de uitzetting der aan zichzelf overgelaten gassen en dampen. Reeds Bernouilli leidde hieruit het verband tusschen druk en temperatuur af. Een aanmerkelijke vooruitgang brengt Clausius in de theorie door de beschouwingen over de gemiddelde weglengte tusschen twee botsingen. Denkt men zich eerst deze botsingen als tusschen elastische bollen, spoedig wordt ook deze voorstelling verlaten voor die van een wisselwerking van afstootende of aantrekkende krachten; de formule van Van der Waals [1]) verklaart in algemeene trekken de kritische verschijnselen en de continuiteit van gas en vloeistoftoestand. Het eenige wat ontbreekt, om de vergelijking van theorie en waarneming in alle strengheid mogelijk te maken, is de Newton, die de wet der moleculaire aantrekking ontdekken zal! En tegenover de bezwaren der Energetiek stelle men den grooten vooruitgang, dien de kinetische theorie in den laatsten tijd gebracht heeft in de theorie der electrische verschijnselen.

[1]) Met verbazing ziet men in de inleiding dezen naam hardnekkig met een V gespeld!

Bij de vertaling is de oorspronkelijke tekst zeer getrouw gevolgd. Boltzmann zelf heeft slechts op één plaats, gevolg gevende aan een opmerking o.a. van onzen landgenoot Wind, dien tekst gewijzigd. We meenen daarom met een korte inhoudsopgave te kunnen volstaan.

De Inleiding verdedigt het goed recht der atomistische en mechanische theorien, en geeft een eerste afleiding van de uitdrukking voor den gasdruk. In overeenstemming met de zoo juist geschetste historische ontwikkeling wordt in Hoofdstuk I aangenomen, dat de moleculen zich gedragen als elastische bollen, en worden voorloopig uitwendige krachten en stroomingen uitgesloten. Echter wordt dadelijk een mengsel van twee gassen in behandeling genomen; er worden functies f en F opgesteld, aangevende de verdeeling en snelheden der beide molecuulsoorten, en de beschouwing van de veranderingen dezer functies tengevolge van de botsingen voert in verband met de voorwaarden voor een stationnairen toestand tot de wet van Maxwell. Het bewijs, dat deze wet de eenige mogelijke snelheidsverdeeling weergeeft, voert tot de opstelling van de functie H, die bij de gegeven onderstellingen alleen kan afnemen en minimum is voor de verdeeling volgens Maxwell. De analogie met de entropie van het gas, die alleen toenemen kan, en de mathematische beteekenis der functie H, wier minimum blijkt overeen te komen met wat men de meest „waarschijnlijke" snelheidsverdeeling kan noemen, voeren Boltzmann tot de slotsom, dat de tweede wet der thermodynamica een waarschijnlijkheidstheorema blijkt te zijn. — De aldus verkregen wet van Maxwell voert nu tot de problemen van gemiddelde weglengte en al wat daarmede in verband staat, als warmtegeleiding, wrijving van gassen, diffusie enz.

Hoofdstuk II beschouwt de moleculen als krachtcentra, waarbij de wet der krachtwerking in 't midden wordt gelaten, en laat ook uitwendige krachten en stroomingen toe. Op analoge wijze worden nu hier het entropiebeginsel bewezen en de voorwaarden voor een stationnairen toestand opgesteld. De verkregen resultaten worden toegepast op vragen van aërostatica en hydrodynamica, beide voor stationnaire toestanden.

Hoofdstuk III behandelt gevallen van niet-stationnaire toestanden. Bij de beschouwing van den invloed der botsingen (of ontmoetingen) voor het geval dat de werking tusschen twee mole-

culen voorgesteld kan worden door $\frac{K}{r^{n+1}}$ stuit men dan al spoedig op integralen, die aanmerkelijk eenvoudiger in de behandeling worden indien men $n = 4$ stelt, dus een werking omgekeerd evenredig aan de vijfde macht van den afstand aanneemt. Met deze onderstelling, waarbij met Maxwell aan een afstooting gedacht wordt, behandelt Boltzmann dan o.a. warmtegeleiding, inwendige wrijving en diffusie.

In de beide achteraan gedrukte noten ontwikkelt Brillouin enkele bedenkingen. De voornaamste betreffen de bewijsvoering over de noodzakelijkheid van de wet van Maxwell en zijn gedeeltelijk reeds vroeger, o.a. door Loschmidt, geuit. Men kan zeggen, dat deze in 't algemeen in verband staan met de moeielijkheid om, uitgaande van bewegingen, die alle omkeerbaar zijn, te komen tot de niet-omkeerbare veranderingen, die in de natuur worden waargenomen — een kwestie waarover voorloopig het laatste woord nog niet gesproken is.

E. VAN EVERDINGEN JR.

Cryoscopie par F. M. RAOULT. Recueil „Scientia", série phys.-math., fascicule n°. 13, XIII, 106 blz. Parijs, C. Naud, 1901.

De naam *Cryoscopie* voor het bepalen van de vriespuntsverlaging in oplossingen is afkomstig van den het vorig jaar overleden schrijver van dit werkje, wiens onderzoekingen die bepaling tot een zeer belangrijk hulpmiddel bij het chemisch onderzoek gemaakt hebben. De geheele inrichting van het boek doet Raoult kennen in de eerste plaats als een man van de practijk, zoo zelfs, dat men twijfelt of dit no. wel tot het domein der „physique mathématique" behoort. Het eerste en tweede gedeelte, algemeene beginselen en waarnemingsmethoden, omvatten samen 39 blz.; men kan nagaan, dat hierin alle mogelijke fouten besproken, alle voorzorgen minutieus beschreven worden. Dan komt een derde gedeelte, de vriespuntsverlaging in niet-electrolyten, dus in niet gedissocieerde oplossingen, met 42 blz. Een groot materiaal van waarnemingen leidt tot de eerste wet van Raoult: de moleculaire vriespuntsverlaging in eenzelfde oplosmiddel is voor alle opgeloste stoffen dezelfde constante, — die dan nogmaals opzettelijk getoetst wordt aan andere waarnemingen. Een tweede wet, aangevende dat

deze constante evenredig zou zijn aan het moleculair gewicht van het oplosmiddel, heeft tengevolge van nauwkeuriger onderzoek moeten plaats maken voor de wet van Van 't Hoff (1886), uit thermodynamische beschouwingen afgeleid en in alle opzichten bevestigd. Nu hebben indertijd Raoult en Recoura een een empirische formule gegeven voor de dampspanningsverlaging bij oplossingen. Raoult brengt deze in verband met een door hem in 1894 afgeleide „mathematische" betrekking en komt zoo tot de wet van Van 't Hoff. Gaat men na, dat de „mathematische" betrekking evenals deze wet langs thermodynamischen weg moet verkregen zijn, dan leest men met eenige verbazing de conclusie: „On voit par là que cette formule, que son auteur a déduite d'une hypothèse, n'est, en réalité, qu'une forme particulière de la loi expérimentale de Raoult et Recoura."

Ook in de vierde afdeeling, de electrolyten, gedissocieerde oplossingen, geeft Raoult eerst een aantal empirische wetten, door hemzelf voor bijzondere gevallen gevonden, en eerst later den algemeenen regel, aan de theorie van Arrhenius ontleend. Dit gedeelte, practisch van minder, maar theoretisch van meer gewicht, omvat slechts 19 bladzijden.

Een portret van Raoult en een korte biografie door R. Lespieau gaan aan het werk vooraf.

Franges d'interférence et leurs applications métrologiques par J. Macé de Lépinay. Recueil „Scientia", série phys.-math., fascicule n°. 14, 101 blz. Parijs, C. Naud, 1902.

„Un rayon de lumière, avec ses séries d'ondulations d'une tènuité extrême mais parfaitement régulières peut être considéré comme un micromètre naturel de la plus grande perfection, parfaitement propre à déterminer des longueurs." Met deze woorden van Fizeau schetst Macé de Lépinay het denkbeeld, tot welks verwezenlijking hijzelf zooveel heeft bijgedragen. In de toekomst ziet hij reeds een volledig systeem van absolute eenheden: een golflengte, een daaruit afgeleide massa eenheid en een trillingstijd als tijdseenheid; inderdaad zijn de verhoudingen van de beide eerste eenheden tot die van het metriek stelsel zoo goed als vastgesteld.

In plaats van de niet direct waarneembare golflengten zelf

treden bij de metingen steeds interferentiestrepen op bij wijze van deelstrepen. Het eerste gedeelte bevat dus algemeene beginselen voor het tot stand komen van interferentie; een van de beste hulpmiddelen hierbij zijn de door Perot en Fabry toegepaste luchtlagen begrensd door twee zwak verzilverde, evenwijdige glasplaten, die bij terugkaatsing een groot aantal interfereerende bundels met gelijke phase-verschillen leveren, zoodat zeer smalle, heldere strepen ontstaan. Bij groote phaseverschillen wordt de al of niet zichtbaarheid van interferentiestrepen door de homogeniteit der lichtbron bepaald; Michelson heeft hiervan een zeer handig gebruik gemaakt om de samenstelling van allerlei bijna homogene stralingen te onderzoeken. Als zeer homogeen dienen tegenwoordig bijna uitsluitend kwik- en cadmium-stralingen.

Een tweede gedeelte behandelt de methoden om ten behoeve der lengtemeting het aantal golflengten van het wegverschil der interfereerende stralen, de z.g.n. orde der interferentie, te bepalen. Het breukdeel in dit ordegetal wordt eenvoudig gevonden door schatting van een deel van den afstand van twee strepen. Veel moeilijker is het bepalen van het geheele deel, daar aan tellen niet gedacht kan worden. Het doel wordt hier bereikt door het gelijktijdig of achtereenvolgens bezigen van verschillende lichtsoorten; naarmate deze veel of weinig verschillen, treden op kleinere of grootere afstanden coincidenties op, welke als deelstrepen voor een collectieve eenheid kunnen dienen. Is dan, met behulp van een voorloopige ruwe meting, het ordegetal voor één lichtsoort op eenige tientallen na bepaald, dan beslissen de waargenomen breukdeelen bij de andere lichtsoorten over de keuze van het juiste getal. Men dankt deze methode vooral aan Benoit en aan Pérot en Fabry.

Van de derde afdeeling, de resultaten, vermelden we alleen een van de uitkomsten van de vergelijking der golflengten R, G, B van de roode, groene en blauwe cadmiumlijnen met den standaardmeter door Michelson en Benoit met hun uiterst nauwkeurigen interferometer:

$$1 \text{ M.} = 1.553.163{,}5 \text{ R.}$$

nauwkeurig minstens op 1 millioenste.

De nieuwere bepalingen van de massa van het standaardkilogram uitgedrukt in de theoretische massa-eenheid met behulp der interferentie-methoden stemmen zeer goed overeen, maar

toonen een systematisch verschil met de uitkomsten, verkregen met de methode van vergelijking door contact.

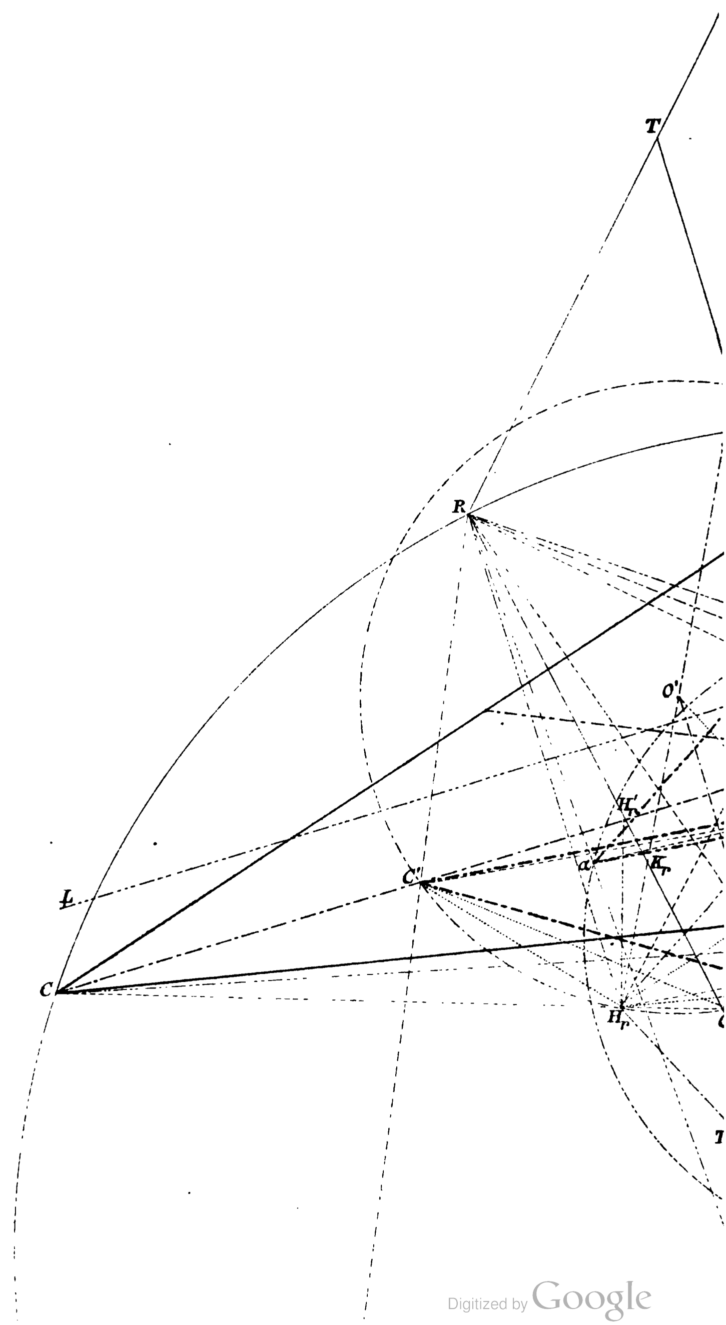
Le phénomène de Kerr et les phénomènes électro-optiques par E. NÉCULCÉA. Recueil „Scientia", série phys.-math., fascicule n°. 16, X, 91 blz. Parijs, C. Naud, 1901.

Het hier bedoelde verschijnsel van Kerr is de dubbelbreking van het licht in dielectrica veroorzaakt door een electrisch veld — niet dus de draaiing van het polarisatievlak bij terugkaatsing op een gemagnetiseerden ijzerspiegel, hier te lande o.a. door de onderzoekingen van Zeeman bekend.

De waarnemingen, waarover het eerste gedeelte handelt, zijn hoofdzakelijk van Kerr zelf, Brongersma en Röntgen. Terwijl in vaste stoffen de dubbelbreking eerst langzaam ontstaat en nog langzamer verdwijnt, is in vloeistoffen het verschijnen momentaan; volgens Abraham en Lemoine minder dan $\frac{1}{4.10^8}$ seconde na het opwekken van het electrisch veld.

De theorieën van Pockels en Voigt vullen het tweede gedeelte. De eerste gaat uit van de onderstelling, dat er een lineair verband is tusschen de dielectrische constanten van het medium en de componenten der electrische kracht. Zijn resultaat, dat zoowel de gewone als de buitengewone straal een gewijzigde voortplantingssnelheid krijgen, de eerste het minst, is misschien slechts schijnbaar in tegenspraak met de proeven, die alleen het laatste zeker aantoonen. — Voigt behandelt het probleem door aan de algemeene bewegingsvergelijkingen der electriciteit van Hertz nieuwe termen toe te voegen, die den invloed van het electrisch veld beschrijven. We kunnen daarover niet meer meedeelen dan dat de verklaring (beschrijving?) niet alleen de waargenomen, maar ook eenige nieuwe mogelijke verschijnselen omvat. Op een van deze, een electrisch analogon van het verschijnsel van Zeeman, wordt nader de aandacht gevestigd in de derde afdeeling. Ongelukkigerwijze blijkt de te verwachten verplaatsing eener spectraallijn slechts $^1/_{20000}$ van den afstand der natrium-lijnen, zoodat er voorloopig niet veel kans is op experimenteele bevestiging.

E. VAN EVERDINGEN JR.


T
R
O'
H'
a
K
C'
L
C
H